

文章编号: 1007- 4627(2000)04-0201-09

# 规范势可分解理论及其应用\*

李希国

(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心, 甘肃 兰州 730000)

(中国科学院近代物理研究所, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 对近几年用几何代数方法建立的规范场可分解理论进行了详细的评述, 并给出了应用它研究欧拉示性数的新结果. 简述了一些应用领域. 从目前国际研究的进展来看, 规范势可分解理论也将为研究规范场静态解和夸克禁闭提供新的途径.

关键词: 规范场; 几何代数; 欧拉示性数; 拓扑流

中图分类号: O413.4、O186.16 文献标识码: A

## 1 引言

规范场理论不仅是人们深入理解和研究 4 种基本相互作用的理论基础, 而且是讨论时空的几何结构和拓扑性质的有力工具<sup>[1]</sup>.

从数学角度看, 流形  $M$  的局域性质和拓扑性质是通过主丛  $P(\pi, M, G)$  上的联络(规范势)解析地描述, 纤维丛的性质由底流形和变换群性质描述. 联络实现了纤维上截面之间的微分运算, 使流形的整体性质和局域性质相联系. 用物理术语而言, 规范势描述了传递基本相互作用场的物理性质. 目前的研究结果表明,  $U(1)$  规范势——电磁相互作用、 $SU(2) \otimes U(1)$  规范势——电弱相互作用、 $SU(3)$  规范势——强相互作用和  $GL(4)$  规范势——引力相互作用(见图 1).

规范势的特性: (1) 几何量, 反映不同的几何性质; (2) 带有拓扑信息; (3) 传递粒子之间的相互作用. 大多数人认为, 规范场是一个不可分割的整体, 20 多年前段一士教授与其合作者<sup>[4]</sup>在研究 't Hooft 磁单极时就提出了规范势可用一些更基本场分解和具有内部结构的观点. 众所周知, 在广义相对论中, 联络就是由  $g_{\mu\nu}$  或  $e^a_\mu$  及 Contorsion 表示. 近十几年来, 规范势分解理论和建立在  $\Phi$ -映射基础上的拓扑流理论的框架取得了很大的进展, 其应用已涉及到广泛的物理领域, 即从宇宙论、时空的

量子化<sup>[5,6]</sup>和规范场的拓扑问题<sup>[7]</sup>到凝聚态物理<sup>[8]</sup>. 最新研究表明规范势分解理论还涉及到渐近自由和夸克与胶子禁闭问题<sup>[9]</sup>. 所以, 规范势分解理论和拓扑流理论是很重要的一种有效方法, 而本文所述的结果是我们在国际上首先得到的.

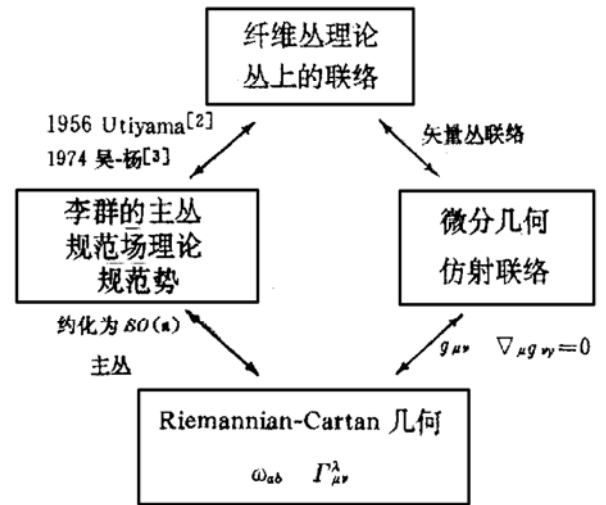


图 1 用联络(规范势)建立的纤维丛理论与 Riemannian-Cartan 几何的关系

用矢量场分解的动机: (1) 物理方面, 理论物理学家在规范场方程静态解的研究中发现, 这些解的特征与时空流形上规范场的大范围拓扑性质相关. 例如, 1950 年 Ginzburg 与 Landau 和 1973 年 Nielson 分别得到的涡旋解; 1961 年 Skyme 得到的

\* 收稿日期: 2000-04-21

\* 资助项目: 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心、中国科学院近代物理研究所所长基金资助; 中科院“百人计划”资助  
作者简介: 李希国(1961-), 男(汉族), 甘肃西峰人, 理学博士, 副研究员, 从事规范场理论和中高能核物理研究.

重子解; 1948 年 Dirac, 1974 年 't Hooft 和 Polyakov 及 1975 年段一士等人先后得到的磁单极解; 1975 年 Belavin, Polyakov, Schwartz 等人得到的瞬子解, 以及最近 L. Faddeev 和 A. Niemi<sup>[9]</sup>指出  $SU(2)$  的分解与强作用中的禁闭有关, 并且它的静态解是纽结的. 这些解可以当作带有拓扑数的点或弦, 由拓扑流描述. (2) 数学方面, 流形的一个重要的拓扑不变量 Euler-Poincaré 示性数, 是由流形上矢量场的零点的拓扑性质确定的. 而规范势可分解的观点实现了用描述流形拓扑性质的基本场(截面)分解规范势, 使其拓扑信息直接输入到规范势中, 从而直接地、解析地研究上述这些问题. 下面我们近几年来用单位矢量场对自旋联络( $SO(n)$  规范势)分解研究和应用其讨论 Gauss-Bonnet-Chern (GBC) 定理、Hopf 定理、Morse 理论以及相关应用方面的一些进展, 这对于进一步完善规范势分解理论是非常有意义的.

## 2 自旋联络的一般分解理论

### 2.1 规范势可分解性

设  $A, F, \Psi$  分别是主丛  $P(\pi, M, G)$  上的规范势(联络) 1- 形式和场强(曲率张量) 2- 形式及物质场(截面), 则在规范变换  $S$  下, 满足:

$$A' = SAS^{-1} + dSS^{-1}, \quad (1)$$

$$F' = SFS^{-1}, \quad (2)$$

$$\Psi' = S\Psi, \quad D\Psi = SD\Psi, \quad (3)$$

这是规范场理论的基础. 满足规范变换(1)式的规范势  $A$  总可以分解为两部分

$$A = \Gamma + a, \quad (4)$$

要求满足规范变换

$$\Gamma' = S\Gamma S^{-1} + dSS^{-1}, \quad (5)$$

$$a' = SaS^{-1} \quad (6)$$

时, 则  $\Gamma + a$  严格满足规范变换(1)式, 且由基本场构成. 设基本场为  $\Psi^a, X^a$ , 则

$$\Gamma = (\Psi, X, \dots, d\Psi, dX, \dots),$$

$$a = (\Psi, X, \dots, D\Psi, DX, \dots),$$

即规范势的内部结构由更基本场的属性和分解形式来体现.

### 2.2 自旋联络的一般分解形式

设  $M$  是一个紧致的  $n$  维黎曼流形,  $\Phi$  是  $M$  矢量丛上的一个矢量场(光滑截面), 定义一个对应的单位矢量场:

$$n^a = \frac{\Phi^a}{\|\Phi\|}, \quad \|\Phi\| \equiv \|\Phi^a\|, \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

式中“ $a$ ”是局域正交标架, 这里使用了求和约定. 显然  $n$  是  $M$  的球丛  $S(M)$  上的一个截面. 从(7)式可知, 矢量场  $\Phi$  的零点正好是单位矢量场  $n$  的奇异点, 且自然约束为

$$n^a n^a = 1, \quad n^a dn^a = 0. \quad (8)$$

实际上, 黎曼流形上的矢量丛就是以群  $G = SO(n)$  为结构群的主丛, 其联络称为自旋联络. 设  $x^\mu$  是流形  $M$  的局域坐标, 则自旋联络 1- 形式和曲率张量 2- 形式分别为

$$\omega^b = \omega_i^{ab} dx^i, \quad \omega^{ab} = -\omega^{ba}, \quad (9)$$

$$F^{ab}(\omega) = d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega^b = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{ab}(\omega) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (10)$$

协变微商 1- 形式定义为

$$D_\omega n^a = dn^a - \omega^{ab} n^b, \quad n^a D_\omega n^a = 0. \quad (11)$$

设  $\mathcal{Y}_a$  为  $n$  维 Dirac 矩阵, 满足 Clifford 代数  $\mathcal{Y}_a \mathcal{Y}_b + \mathcal{Y}_b \mathcal{Y}_a = 2\delta_{ab}$ , 在几何代数理论<sup>[10,11]</sup>中, 取  $\mathcal{Y}_a$  为基矢, 则  $n^a, \omega^{ab}$  和  $F^{ab}$  分别表示为矩阵形式:

$$n = n^a \mathcal{Y}_a, \quad \omega = \frac{1}{2} \omega^{ab} I_{ab},$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} F^{ab}(\omega) I_{ab}, \quad (12)$$

称  $n$  和  $\omega, F(\omega)$  为几何代数中的矢量和 2- 矢量, 其中  $I_{ab}$  是  $SO(n)$  群的生成元. 设  $h$  和  $f$  是几何代数中的任意矢量, 它们的几何积为

$$fh = f^a h^a + (f^a h^b + h^a f^b) I_{ab}. \quad (13)$$

由(13)式可证

$$nn = n^a n^a = 1, \quad dnn + ndn = 0, \quad n^a D_\omega n^a + D_\omega n^a n^a = 0, \quad (14)$$

$$D_\omega n = dn - [\omega, n], \quad (15)$$

$$F(\omega) = d\omega = \omega \wedge \omega. \quad (16)$$

对于几何代数中的一个  $r$ -矢量  $T_r$ , 不难证明它的协变微商 1- 形式

$$D_\omega T_r = dT_r - [\omega, T_r]. \quad (17)$$

由(14), (15) 式得自旋联络 1- 形式为<sup>[10]</sup>

$$\omega = \frac{1}{2}(dn n + n D_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(\omega), \quad (18)$$

式中引入了一个符号

$$J_n(\omega) = n\omega n + \omega. \quad (19)$$

(18) 式就是用单位矢量场分解自旋联络的一般形式, 第一项被称为基本项, 第二项被称为补偿项, 使其满足规范变换(1) 式.

设  $\{W, V, U, \dots\}$  是  $M$  上一个开覆盖,  $S (= S_{VU},$  转换矩阵) 是规范变换, 对于任意两个开领域  $V$  和  $U$ , 若  $V \cap U \neq \emptyset$ , 则

$$n_V = S n_U S^{-1}, \quad (20)$$

其中,  $n_V, n_U$  分别是  $V$  和  $U$  上的单位矢量场. 若  $V$  和  $U$  上分别存在联络为  $\omega$  和  $\omega$ , 则要求

$$\omega = S \omega S^{-1} + dS S^{-1}. \quad (21)$$

由(18), (19) 和(20) 式可证

$$\begin{aligned} \omega &= \left| \frac{1}{2}(dn_V n_V + n_V D_{\omega_V} n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega) \right| \\ &= S \left| \omega - \frac{1}{2}(dn_U n_U + n_U D_{\omega_U} n_U) - \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega) \right| S^{-1}. \end{aligned}$$

这一关系说明在开领域  $U$  上自旋联络的分解形式  $\omega = \frac{1}{2}(dn_U n_U + n_U D_{\omega_U} n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega)$  成立时, 在开领域  $V$  上自旋联络的分解形式  $\omega = \frac{1}{2}(dn_V n_V + n_V D_{\omega_V} n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega)$  也一定成立, 因此一般分解式具有整体性. 另一方面, 设  $k$  为球丛上独立于  $n$  的另一截面  $k$  同样是几何代数中的矢量, 而  $nk$  构成几何代数中的 2- 矢量, 由(17) 式得

$$D_\omega(nk) = d(nk) - [\omega, nk].$$

经简单地推导<sup>[11]</sup>, 上式可变为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(dn n + n D_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(\omega) \\ &= \frac{1}{2}(dk k + k D_\omega k) + \frac{1}{2}J_k(\omega). \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式表明, (18) 式的分解形式不依赖于单位矢量场的选择.

设  $\omega = \omega + a, b = \frac{1}{2}b^{ab}I_{ab}$ , 且  $b' = S b S^{-1}$  是  $so(n)$  李代数中的任意元素, 总可构造<sup>[12]</sup> 一个  $a = 1/2(nbn + n)$ , 则

$$J_n(\omega) = J_n(B) = nBn + B, \quad (23)$$

其中,  $B = \omega + b$  是另一个任意自旋联络, 因此自旋联络的一般分解式可写为

$$\omega = \frac{1}{2}(dn n + n D_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(B). \quad (24)$$

曲率 2- 形式为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{4}(-D_B n \wedge D_B n + D_\omega n \wedge D_\omega n + \\ &\quad n D_B D_\omega n - D_B D_\omega n n) + \\ &\quad \frac{1}{2}[n F(B) n + F(B)], \end{aligned} \quad (25)$$

其中,  $D_B n, F(B)$  分别由(15) 和(16) 式定义. 使用(12) 和(13) 式, 由(24) 和(25) 式分别得到它们的分量式为

$$\begin{aligned} \omega^{ab} &= (dn^a n^b - n^a dn^b + n^a D_\omega n^b - n^b D_\omega n^a) + \\ &\quad \frac{1}{2}J_n^{ab}(B), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} F^{ab} &= -D_B n^a \wedge D_B n^b + D_\omega n^b \wedge D_\omega n^a + \\ &\quad n^a D_B D_\omega n^b - n^b D_B D_\omega n^a + F^{bc}(B) n^c n^a - \\ &\quad F^{ac}(B) n^c n^b + F^{ab}(B), \end{aligned} \quad (27)$$

其中,

$$J_n^{ab}(B) = 2(B^{bc} n^c n^a - B^{ac} n^c n^b + B^{ab}). \quad (28)$$

(26), (27) 和(28) 式就是我们所得到的  $SO(n)$  规范理论用单位矢量场分解的一般形式.

### 3 $U(1)$ 和 $SU(2)$ 群的规范势分解<sup>[13]</sup>

#### 3.1 $U(1)$ 群的规范势分解

设  $T$  是  $U(1)$  群的生成元, 由群的局域性质可知

$$T = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}I^{ab}, \quad I^{ab} = \epsilon^{ab}T. \quad (29)$$

$U(1)$  群的规范势与  $SO(2)$  群的规范势互为对偶:

$$W = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\omega_{ab}, \quad \omega^{ab} = \epsilon^{ab}W. \quad (30)$$

可证:

$$J_n(B) = 0 \quad (31)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(dn n + n D_\omega n), \quad (32)$$

$$F(\omega) = d\omega = \frac{1}{2}(-dn \wedge dn + dn \wedge D_\omega n + n dD_\omega n). \quad (33)$$

设  $k$  是一个单位规范平行矢量, 则

$$D_\omega k = 0, \quad (34)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(dk k),$$

$$F(\omega) = -\frac{1}{2}dk \wedge dk. \quad (35)$$

可证:

$$\omega = \omega + i d\alpha, \quad F(\omega) = F(\omega). \quad (36)$$

这里  $S = \exp\{i(1/2)\alpha^{ab}I_{ab}\} = \exp\{i\alpha T\}$ . (36) 式表明 (32) 式与它的分解之间相差一个规范变换. 最后我们得到

$$\omega^{ab} = (dn^a n^b - n^a dn^b + n^a D_\omega n^b - n^b D_\omega n^a), \quad (37)$$

$$F^{ab}(\omega) = -2dn^a \wedge dn^b + dn^a \wedge D_\omega n^b - dn^b \wedge D_\omega n^a + n^a dD_\omega n^b - n^b dD_\omega n^a \quad (38)$$

和  $U(1)$  群的分解

$$W_\parallel = \epsilon_{ab}dk^a k^b, \quad G(W_\parallel) = -\epsilon_{ab}dk^a \wedge dk^b. \quad (39)$$

(39) 式在研究位错、时空缺陷及涡旋中得到了应用<sup>[14]</sup>.

#### 3.2 $SU(2)$ 群的规范势分解

设  $T^a (a=1, 2, 3)$  是  $SU(2)$  群的生成元, 则

$$T^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}I_{bc}, \quad I_{ab} = \epsilon_{abc}T^c, \quad (40)$$

对  $SU(2)$  和  $SO(3)$  群, 它们的规范势和场强互为对偶:

$$W^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega^{bc}, \quad \omega^{ab} = \epsilon^{abc}W^c, \quad (41)$$

$$G^a(W) = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}F^{bc}(\omega), \quad F^{ab}(\omega) = \epsilon^{abc}G^c(\omega). \quad (42)$$

而且

$$J_n^a(W) = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{nbc}(\omega), \quad J_n^{ab}(\omega) = \epsilon^{abc}J_n^c(W), \quad (43)$$

$$J_n^a(W) = 2Zn^a,$$

$$J_n(\omega) = \epsilon_{abc}Zn^c I_{ab} = J_n^a(W)T^a, \quad (44)$$

其中  $Z = W^a n^a$  为  $U(1)$  规范势, 是  $SU(2)$  规范势在单位矢量场  $n$  上的投影. 我们得到  $SO(3)$  规范势的一般分解式为

$$\omega^{ab} = dn^a n^b - n^a dn^b + n^a D_\omega n^b - n^b D_\omega n^a + \epsilon^{abc}n^c Z, \quad (45)$$

$$F^{ab}(\omega) = -dn^a \wedge dn^b + D_\omega n^a \wedge D_\omega n^b + n^a dD_\omega n^b - n^b dD_\omega n^a + (D_\omega n^c - dn^c) \wedge Z(\epsilon^{ad}n^d n^b - \epsilon^{bd}n^d n^a) + \epsilon^{abc}(n^c dZ + dn^c \wedge Z). \quad (46)$$

将 (45), (46) 式分别代入 (41) 和 (42) 式, 得到  $SU(2)$  群的一般分解形式为

$$W^a = \epsilon^{abc}(dn^b n^c + n^b D_\omega n^c) + Zn^a, \quad (47)$$

$$G^a(W) = dZn^a - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}(dn^b \wedge dn^c - D_\omega n^b \wedge D_\omega n^c - 2n^b dD_\omega n^c) - Z \wedge D_\omega n^a. \quad (48)$$

对于单位规范平行矢量场, 则  $D_\omega n^a = 0$ , 因此

$$W^a = \epsilon^{abc}dn^b n^c + Zn^a, \quad (49)$$

$$G^a(W) = dZn^a - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}dn^b \wedge dn^c, \quad (50)$$

这一形式在研究磁单极<sup>[4]</sup>和线错<sup>[15]</sup>中得到应用. (47) 式的分解形式比 L. Faddeev 等人 and S.

Shabanov<sup>[16]</sup> 给出的分解形式要严格, 各项意义明确, 并且早 5 年.

## 4 GBC 密度的拓扑结构及其欧拉示性数

### 4.1 球丛上的 Chern-Simons( $n-1$ )—形式

对于一个偶维紧致的定向黎曼流形  $M$ , 存在一个唯一的  $n$ —形式  $\Lambda$  为

$$\Lambda = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} \cdot F^{a_1 a_2}(\omega) \wedge \dots \wedge F^{a_{n-1} a_n}(\omega), \quad (51)$$

由 Bianchi 恒等式  $DF^{ab}(\omega) = 0$  可证  $D\Lambda = 0$ , 即  $\Lambda$  不依赖于自旋联络  $\omega$  设  $\pi$  是一个自然投影, 则  $\Lambda$  被拉回到球丛  $S(M)$  上为

$$\pi^* \Lambda = d\Omega. \quad (52)$$

Chern 证明了在球丛上的  $(n-1)$ —形式  $\Omega$  可写为

$$\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \cdot \frac{2^{-k}}{(n-2k-1)!! k!} \Theta_k, \quad n \geq 4, \quad (53)$$

被称为 Chern 公式, 其中

$$\Theta_k = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_{n-2k} a_{n-2k+1} a_{n-2k+2} \dots a_{n-1} a_n} n^{a_1} D_\omega n^{a_2} \wedge D_\omega n^{a_{n-2k}} \wedge \dots \wedge F^{a_{n-2k+1} a_{n-2k+2}}(\omega) \wedge \dots \wedge F^{a_{n-1} a_n}(\omega). \quad (54)$$

为了讨论  $\Lambda$  的拓扑性质, 选择  $B = B_0 = dUU^{-1}$ , 即平联络, 由(27)式得

$$F^{ab} = -D_0 n^a \wedge D_0 n^b + D_\omega n^a \wedge D_\omega n^b + n^a D_0 D_\omega n^b - n^b D_0 D_\omega n^a. \quad (55)$$

将(55)式代入(54)式, 由(53)式可证<sup>[10]</sup>:

$$\Omega = \frac{1}{(n-1)! A(s^{n-1})} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot n^{a_1} D_0 n^{a_2} \wedge \dots \wedge D_0 n^{a_n}, \quad (56)$$

其中  $D_0 n^a = dn^a - B_0^{ab} n^b$ , 且  $A(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n-2)$  是球  $S^{n-1}$  的面积.

设  $l$  是垂直于  $n$  的一个单位矢量, 在几何代数

理论中有  $nl + ln = 0$ , 由此可构造  $SO(n)$  群的一个局域旋量矩阵表示

$$U = nl. \quad (57)$$

由(15)式和(13)式可证<sup>[10]</sup>

$$D_0 n^a = -dn^a + 2l^a l^b dn^b. \quad (58)$$

将(58)代入(56)式得

$$\Omega = \frac{1}{(n-1)! A(s^{n-1})} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} n^{a_1} \cdot dn^{a_2} \wedge \dots \wedge dn^{a_n}. \quad (59)$$

(59)式是 Chern-Simons  $(n-1)$ —形式. 很显然, 在整个球丛上, 它完全被单位矢量场  $n$  的外微分表示. 对于  $n=2$  的情况,

$$\begin{aligned} \pi^* \Lambda &= \frac{1}{4\pi} \epsilon_{a_1 a_2} F^{a_1 a_2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{a_1 a_2} d(n^{a_1} dn^{a_2}), \\ \Omega &= \frac{1}{2\pi} \epsilon_{a_1 a_2} n^{a_1} dn^{a_2}. \end{aligned} \quad (60)$$

### 4.2 GBC 密度的拓扑结构和 GBC 定理

众所周知,  $\Lambda$  独立于自旋联络, 它确定了流形  $M$  的上同调群  $H^n(M)$  中的同调群, 换言之,  $\Lambda$  在  $M$  上的整体积分是一个拓扑不变量欧拉示性数  $\chi(M)$ .  $\pi^*$  是  $M$  的上同调类到  $S(M)$  的上同调类的映射.  $n^*$  恰是它的逆. 因此,  $n^* \pi^* = 1$ . GBC 定理可表述为

$$\chi(M) = \int_M \Lambda = \int_M n^* \pi^* \Lambda = \int_M n^* d\Omega. \quad (61)$$

式中  $n^* d\Omega$  是将球丛  $S(M)$  上的 Chern-Simons  $(n-1)$ —形式拉回到流形  $M$  上. 使用  $\Phi$ -映射方法, 不难证明, 它可被写成

$$n^* d\Omega = \delta(\mathcal{Q}) D \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| d^n x, \quad (62)$$

其中,  $D(\mathcal{Q}_x)$  是 Jacobian, 由下式定义:

$$\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} D \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| = \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \mathcal{Q} \partial_{\mu_2} \mathcal{Q} \dots \partial_{\mu_n} \mathcal{Q}, \quad (63)$$

$\delta(\mathcal{Q})$  是矢量  $\mathcal{Q}$  空间的 Dirac  $\delta$  函数, 由下式定义:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi \left| \frac{1}{\varphi^{n-2}} \right| &= - \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 - 1)} \delta(\varphi) , \\ \Delta \varphi &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} , \quad n \geq 3 \\ \Delta \varphi (\ln \varphi) &= 2\pi \delta(\varphi) , \quad n = 2 . \end{aligned} \quad (64)$$

在  $M$  上定义 GBC 密度

$$\rho = \delta(\varphi) D \left| \frac{\varphi}{x} \right| . \quad (65)$$

由此可知,  $\rho$  仅仅在  $\varphi$  的零点处不为零. 所以, (62) 式和 (65) 式对研究欧拉示性数的局域和整体拓扑性质是非常重要的.

设  $\varphi^a(x)$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) 有  $N$  个独立的零点, 且它的第  $i$  个零点在  $x = z_i$  处, 根据  $\delta$  函数理论有

$$\delta(\varphi) = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i \delta(x - z_i)}{|D(\varphi^a x)|_{x=z_i}} , \quad (66)$$

则

$$\rho = \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i \delta(x - z_i) , \quad (67)$$

此处,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 被称为第  $i$  个零点的 Hopf 指数(正整数), 它的数学意义是当  $x$  覆盖  $z_i$  领域一次时,  $\varphi$  覆盖相应领域  $\beta_i$  次. 而  $\eta_i$  是 Brouwer 度

$$\eta_i = \text{sgn} D \left| \frac{\varphi}{x} \right|_{x=z_i} = \pm 1 . \quad (68)$$

这一结果表明 GBC 密度  $\rho$  的局域结构是由 Hopf 指数和 Brouwer 度描述的. 将 (67) 式代入 (61) 式得

$$\chi(M) = \int_M \rho \, d^n x = \int_M \mathbf{n}^* \, d\Omega = \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i . \quad (69)$$

上式表明矢量场  $\varphi$  的零点的指数或单位矢量场  $\mathbf{n}$  的奇异点的指数的代数和是欧拉示性数, 这正是 Hopf 定理. 另一方面,

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \int_M \delta(\varphi) D \left| \frac{\varphi}{x} \right| d^n x \\ &= \text{deg} \int_V \delta(\varphi) d^n \varphi = \text{deg} \varphi , \end{aligned} \quad (70)$$

$$\text{deg} \varphi = \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i , \quad (71)$$

其中,  $V$  是矢量空间的体积元,  $\text{deg} \varphi$  是  $\varphi$  的映射度, 描述了欧拉示性数的整体拓扑性质.

### 4.3 从 GBC 定理到 Morse 理论<sup>[17]</sup>

设  $f$  是  $M$  上的 Morse 函数,  $p$  是它的一个临界点, 即  $df|_p = \partial_i f dx^i|_p = 0$ . 在  $p$  点的 Hessian  $H_p f$  是  $\{H_p f\}_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu f$ ,  $\det H_p f \neq 0$ . 设  $\varphi$  是  $f$  的一个梯度场,

$$\varphi^a = e^{a\mu} \partial_\mu f , \quad g^{\mu\nu} = \delta_{ab} e^{a\mu} e^{b\nu} . \quad (72)$$

由此可得

$$D \left| \frac{\varphi}{x} \right|_p = \frac{1}{\sqrt{g}} \det \{H_p f\} . \quad (73)$$

假定  $f$  拥有  $N$  个独立的临界点, 从 (73), (66) 和 (70) 式得

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\det \{H_{p_i} f\}}{|\det \{H_{p_i} f\}|} . \quad (74)$$

对于一个非退化的临界子流形  $M_i \subset M$ , 因为  $\beta_i$  是欧拉示性类数型的拓扑指数, 猜测  $\beta_i = \chi(M)$ , (74) 式被推广为

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^N \chi(M_i) \frac{\det \{H_{M_i} f\}}{|\det \{H_{M_i} f\}|} , \quad (75)$$

式中  $\det \{H_{M_i} f\}$  是  $\det \{H_{M_i} f\}$  在法丛  $\nu(M_i)$  上的值. 若取在临界点  $p_i$  领域内的临界函数为  $f = f(p_i) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + \dots + (x^n)^2$ , 在 Morse 理论中的  $\chi(M)$  为

$$\chi(M) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (-1)^{\lambda_i} , & p_i \\ \sum_{i=1}^N \chi(M_i) (-1)^{\lambda_i} , & M_i \end{cases} \quad (76)$$

这里  $\lambda_i$  是临界点或临界子流形的指数.

## 5 拓扑流理论

近年来, 人们发现在物理体系中存在两类守恒流, 一类是 Noether 流, 依赖于体系的作用量; 另一类是拓扑守恒流, 依赖于体系的拓扑性质, 是自然守恒的.

### 5.1 拓扑流的定义

设  $M \otimes R$  是  $(n+1)$  维流形, 且坐标  $x_0 = t \in R$  标注时间变量, 其线元  $ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (dx)^2 -$

$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ;  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ;  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$ ;  
 $g = \det\{g_{\alpha\beta}\} = -\bar{g}$ ;  $\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{g}$ . 我们能定义一个一般的协变流:

$$j^\lambda = \frac{c}{(n-1)!A(S^{n-1})} \frac{\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \epsilon^{\lambda \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}}{\sqrt{g}} \cdot \partial_{\mu_1} n^{a_1} \partial_{\mu_2} n^{a_2} \dots \partial_{\mu_n} n^{a_n}, \quad (77)$$

$$\nabla_j j^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda (\sqrt{g} j^\lambda) = 0,$$

其中  $c$  是常数. 在(7)式中,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, t)$ , 则

$$\mathcal{Q}: M \otimes R \rightarrow S^{n-1}.$$

定义  $n$  个 Jacobian:

$$\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} D^\lambda \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| = \epsilon^{\lambda \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \mathcal{Q}^1 \dots \partial_{\mu_n} \mathcal{Q}^n,$$

$$D^0 \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| = D \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right|,$$

将(7)式代入(77)式, 并联合(64)式, 则得到:

$$j^\lambda = \frac{c}{\sqrt{g}} \delta(\mathcal{Q}) D^\lambda \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right|, \quad (78)$$

$$j^0 = \frac{c}{\sqrt{g}} \rho. \quad (79)$$

设  $\mathcal{Q}$  拥有  $N$  个孤立零点, 用  $z_i(t)$  标注, 即

$$\mathcal{Q}(z_i(t), t) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (80)$$

由此可得

$$\frac{dz_i^\mu(t)}{dt} = \frac{D^\mu(\mathcal{Q}_x)}{D(\mathcal{Q}_x)} \Big|_{x=z_i}. \quad (81)$$

将(81)式代入(78)式, 得

$$j^\lambda = \frac{c}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i \delta(x - z_i(t)) \frac{dz_i^\lambda}{dt},$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, n \quad (82)$$

$$j^0 = \frac{c}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i \delta(x - z_i(t)). \quad (83)$$

定义一个总荷

$$G = \int_M j^0 \sqrt{g} d^n x = c \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i = c\mathcal{X}(M). \quad (84)$$

在这种情况下,  $\mathcal{Q}(x)$  是  $M \rightarrow S^{n-1}$  的映射. 因此, 我们这里定义的协变自然守恒流是一个拓扑流, 其荷是拓扑荷, 与欧拉示性数成正比. 这些带有拓扑荷的零点像经典粒子一样, 在  $(n+1)$  维流形里以(81)式的运动方程运动.

### 5.2 磁单极流

考虑  $n=3$ , 且  $M = S_p^3$ ,  $c=1/e$ , 则磁荷流

$$j^\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{e} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{abc} \partial_\nu n^a \partial_\rho n^b \partial_\rho n^c. \quad (85)$$

另一方面, 由(50)式得电磁场强

$$F(W) = G^a(W) n^a = (dZ n^a - \frac{1}{2} \epsilon^{abc} dn^b \wedge dn^c) n^a$$

$$= dZ - \frac{1}{2} \epsilon^{abc} n^a dn^b \wedge dn^c,$$

这正是't Hooft 所采用的. 考虑量纲后, 上式变为

$$F_{\mu\nu}(W) = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c, \quad (86)$$

它的对偶场强

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\rho\sigma},$$

$$\partial_\lambda \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{abc} \partial_\lambda n^a \partial_\rho n^b \partial_\rho n^c = -4\pi j^\mu.$$

上式自然给出了磁流, 且

$$J^\mu = \frac{1}{e} \delta(\mathcal{Q}) D^\mu \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i \delta(x - z_i) \frac{dz_i^\mu(t)}{dt}, \quad (87)$$

$$g_i = n_i \frac{1}{e}, \quad n_i = \beta_i \eta_i. \quad (88)$$

从(87)式得

$$\int_{S_p^3} j^0 d^3 x = \frac{1}{e} \int_{S_p^3} \delta(\mathcal{Q}) D^0 \left| \frac{\mathcal{Q}}{x} \right| d^3 x$$

$$= \frac{1}{e} \deg \mathcal{Q} \int_{V^3} \delta(\mathcal{Q}) d\mathcal{Q} = \frac{1}{e} \deg \mathcal{Q}$$

$$= \frac{1}{e} \int_{S_p^3} \sum_{i=1}^N \beta_i \eta_i \delta(x - z_i) d^3 x$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{i=1}^N n_i = \sum_{i=1}^N g_i,$$

其中  $\deg \mathcal{Q}$  是  $S_p^3$  到  $V^3$  (或  $S^2$ ) 的映射度, 称为

Kronecker 指数, 描述了磁荷的整体性质;  $g_i$  是磁荷, 由 Hopf 指数和 Brouwer 度描述, 因此, 磁荷流就是一种拓扑流. 拓扑荷是量子化的, 带有  $g_i$  荷的磁单极处矢量场(Higgs 场)的零点:

$$\begin{aligned} \eta_i &= 1 && \text{磁单极,} && \text{磁荷 } g_i = \beta_i \\ \eta_i &= -1 && \text{反磁单极,} && \text{磁荷 } g_i = -\beta_i \end{aligned}$$

另一方面, (86) 式也可以写成:

$$F_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu} - H_{\mu\nu}, \quad (89)$$

式中

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad (90)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{e} \epsilon^{abc} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c. \quad (91)$$

### 参 考 文 献:

- [1] Eguchi T, Gilkey Peter B, Nanson Andrew J. Graviton, Gauge Theories and Differential Geomentry[J]. Phys Rep, 1995, 259: 213- 393; Nash C. Differential Topology and Quantum Field Theory [M]. Academic Press, London, 1991.
- [2] Ryoju Utiyama. Invariant Theoretical Interpretation of Interaction[J]. Phys Rev, 1956, 101: 1 597- 1 607.
- [3] Wu T T, Yang C N. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields[J]. Phys Rev, 1974, D12: 3 845- 3 857.
- [4] 段一士, 葛墨林.  $SU(2)$  规范理论与  $N$  个磁单极运动体系的电动力学[J]. 中国科学, 1979, 11: 1 072- 1 081.
- [5] Duan Yi-shi *et al.* The Quantization and Production of the Space-time Defects in the Early Universe[J]. Int J Mod Phys A, 1998, 13: 2 001- 2 012.
- [6] Duan Yi-shi, Li Sheng. The Topological Structure of Space-time Disclination [J]. J Math Phys, 1998, 39: 6 696- 6 705.
- [7] Duan Yi-shi, Fu Li-bin. The General Decomposition Theory of  $SU(2)$  Guage Potential, Topological Structure and Bifurcation of  $SU(2)$  Chern Density[J]. J Math Phys, 1998, 39: 1- 13.
- [8] Duan Yi-shi, Jiang Ying, Xu Tao. A New Topological Aspect in the  $O(n)$  Symmetric Time-dependent-Ginzburg-Landau Model[J]. Phys Lett A, 1999, 252: 307- 315.
- [9] Faddev L, Hiemi Antti J. Partially Dual Variables in  $SU(2)$  Yang-Mills Theory[J]. Phys Rev Lett, 1999, 82: 1 624- 1 627; Battye R A, Sutcliffe P M. Knots as Stable Soliton Solutions in a Three-dimensional Classical Field Theory[J]. Phys Rev Lett, 1998, 81: 4 798- 4 801.
- [10] Duan Yi-shi, Lee Xi-guo. General Decomposition of Spin Connection, Topological Structure in Gauss-Bonnet-Chern Theorem and Morse Theory[J]. Helv Phys Acta, 1995, 68: 513- 330.
- [11] Li Xi-guo. General Decomposition Theory of Gauge Potential, Gauss-Bonnet-Chern Theorem and Inner Structure of Torsion [D]. Doctorial Dissertation, Lanzhou University 1994.
- [12] Duan Yi-shi, Li Xi-guo. General Decomposition of Spin Connection, Topological Structure in Gauss-Bonnet-Chern Theorem[J]. Commun Theo Phys, 1998, 29(2): 237- 244.
- [13] 李希国, 段一士, 宋建军.  $SO(n)$  规范势的一般可分解理论 [J]. 高能物理与核物理(已经接收), 2000.
- [14] Duan Y S, Zhang S L. Topological Structure of Dislocation in the Gauge Field Theory of Dislocation and Disclination Contium[J]. Int J Eng Sci, 1990, 28: 689- 696; Duan Y S, Zhang S L, Feng Szeshiang. Gauge Potential Decomposition, Space-time Defects, and Planc's Constant[J]. J Math Phys, 1994, 35(9): 1- 6; Li Xiguo. New Torsion Structure on Reimann-Cartan Manifold and Knots[J]. High Energy and Nuclear Physics, 1999, 23(9): 906- 913.
- [15] Duan Y S, Zhang S L. Topological Structure of Disclination in the Gauge Field Theory of Dislocation and Dislination Contium[J]. Int J Eng Sci, 1991, 29: 153- 160.
- [16] Shabanov S V. Yang-Mills Theory as an Abelian Theory without Gauge Fixing[J]. Phys Lett B, 1999, 463: 263- 272.
- [17] 李希国. 规范势的一般分解理论和它的应用[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1997, 33: 110- 116.

$H_{\mu\nu}$ 是描述(3+ 1) 维时空的纽结孤粒子的张量场<sup>[9]</sup>, 而这个量是  $SU(2)$  规范势在单位矢量场上的投影得到的  $U(1)$  规范场强与  $SU(2)$  规范场强在单位矢量场上投影的差别所致, 造成这种差异的原因还需要进一步的讨论.

总之, 规范场可分解理论和  $\Phi$ -映射的拓扑流理论的研究取得了很大的进展, 近4年来, 它们的应用研究范围涉及到了物理学的许多领域, 引起了国际同行的兴趣和关注, 并逐渐认识到了它们对研究规范场理论的重要性. 由于篇幅所限, 这里不能详述.

致谢 作者对段一士先生给予的讨论和提供的部分文献表示衷心的感谢.



# Decomposition Theory of Gauge Potential and Its Application<sup>\*</sup>

LI Xi-guo

(Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

(Institute of Modern Physics, the Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** The recent study of decomposition of gauge fields by means of methods of the geometric algebra was reviewed in detail. The new results in the study of the Euler characteristic by using the decomposition of gauge fields were described. On the other hand, some recent application fields of the decomposition of gauge fields and topological current theory were introduced. The new developments of the investigation in the area have also shown that the decomposition of gauge fields will provide a new way for the study between the stable solution of the gauge field and the confinements phenomena in strong interaction.

**Key words:** gauge field; geometry algebra; Euler characteristic; topological current

(上接第194页)

## Consistency and Sum Rule in Relativistic Nuclear Many-body Theory<sup>\*\*</sup>

MA Zhong-yu<sup>1,2,3</sup>, CAO Li-gang<sup>2</sup>

(1 Center of Nuclear Theoretical Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China;

2 China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China;

3 Institute of Theoretical Physics, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** A consistent treatment is extremely important in relativistic approaches. We emphasized the consistent approach in relativistic random phase approximation built on relativistic mean field ground states. The consistent treatment requires that the studies of the ground state and excited states of giant resonances are based on same effective Lagrangian, and on a same complete set of basis. It was found that the effect of the Dirac states could not be neglected, especially in the case of giant monopole resonance. A constrained relativistic mean field theory was adopted to obtain the energy inverse weighted sum rule of giant monopole resonance, which shows again the importance of the effect of Dirac states.

**Key words:** relativistic random phase approximation; negative energy states in Dirac sea; isoscalar giant monopole resonance

\* **Foundation item:** Foundations of Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou; Foundation of Director Institute of Modern Physics; "One Hundred Persons Project" of the Chinese Academy of Sciences

\*\* **Foundation item:** NSFC(19847002, 19835010); National Major State Basic Research Development (G200077407)