

文章编号: 1007-4627(2006)02-0115-04

反应堆高阶 k 本征方程数值计算方法的改进*

吕 栋, 张少泓, 王 涛

(上海交通大学核科学与系统工程系, 上海 200030)

摘 要: 针对反应堆高阶 k -本征方程数值计算问题, 提出了提高计算效率和计算精度的改进方法, 并以一维问题为例, 对该方法进行了验证。

关键词: 高阶谐波; 数值计算; 迭代; 收敛判据

中图分类号: TL329 **文献标识码:** A

1 引言

反应堆 k 本征方程存在一系列的本征值和本征函数^[1], 有关零阶本征值 k_0 和对应的本征函数 ϕ_0 (也称基波, 即反应堆稳定运行时的通量密度分布) 的数值计算方法迄今已发展成熟, 但有关高阶本征值和本征函数 (亦称高阶谐波) 计算方法的研究工作迄今开展相对较少, 高阶本征值问题求解所面临的一些特殊困难也尚未完全解决。

近年来, 随着反应堆 k 本征方程高阶谐波有关应用研究工作的开展^[2-4], 其作用逐步被人们所重视, 有必要专门针对高阶本征值问题的求解方法开展更深入细致的研究工作。

2 高阶本征方程求解方法的改进

文献[4]给出了求解反应堆高阶 k 本征方程的一般性方法。本文在此基础上, 从理论上提出了适用于任意阶次本征方程求解的改进方法, 可提高高阶本征值问题的计算效率和精度。

2.1 迭代初值的设置

由幂迭代过程的收敛特性可知 i 阶谐波的收敛速度取决于占优比 σ_i ($\sigma_i = k_{i+1}/k_i$), 其中 k_i 为第 i 阶本征值。 i 值越大, 占优比就越接近 1, 迭代收敛速度就越慢。因此, 高阶本征方程的数值求解会随着其阶次的提高而变得困难, 尤其在求解多维大尺寸问题时, 表现就更为显著。

由于用户设定的高阶谐波迭代初始值接近真值的程度会显著影响所需的迭代次数; 因此, 从提高谐波计算效率的角度, 应使迭代初值尽可能靠近真值。本文根据幂迭代过程不同阶次谐波具有不同衰减速度的原理, 提出了一种简便易用的谐波迭代初值的设定新方法。

设 $k_0^{(0)}$, $\phi_0^{(0)}$ 分别为常规基波求解过程中用户设定的有效增殖系数和中子通量密度的迭代初值, 根据谐波函数集的完备性, 任意给定的通量分布都可以以谐波为基函数加以展开:

$$\phi_0^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i \quad (1)$$

设用 $\psi_0 = F\phi_0$ 表示裂变源项, 则反应堆零阶 k 本征值问题可写为

$$M\phi_0 = \frac{1}{k_0} \psi_0 \quad (2)$$

经过一次源迭代后, 可得:

$$\phi_0^{(1)} = \frac{k_0}{k_0^{(0)}} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right) \phi_i \quad (3)$$

$$k_0^{(1)} = \frac{\langle \psi_0^{(1)} \rangle}{\langle \psi_0^{(0)} \rangle / k_0^{(0)}} = k_0 \frac{\langle F \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right) \phi_i \rangle}{\langle F \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i \rangle} \quad (4)$$

收稿日期: 2005-11-20; 修改日期: 2005-01-09

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10505015)

作者简介: 吕 栋(1982-), 男(汉族), 江苏盐城人, 硕士研究生, 从事核反应堆物理研究; E-mail: gavincn@sjtu.edu.cn

依此类推,可以得到第 n 次外迭代时的一般表达式如下:

$$\phi_0^{(n)} = \frac{k_0^n}{\prod_{j=0}^{n-1} k_0^{(j)}} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right) \phi_i, \quad (5)$$

$$k_0^{(n)} = k_0 \times \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right)^n \langle F\phi_i \rangle}{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right)^{n-1} \langle F\phi_i \rangle}。 \quad (6)$$

由于各阶本征值随阶次逐步递减,因此,当 $n \rightarrow \infty$ 时,以上的迭代过程分别收敛于零阶本征值和基波本征函数。这就是通常源迭代的原理。

求解一阶谐波时,谐波迭代初值的设置可从以上迭代过程的分析得到启示。现不妨假设经 n 次迭代后,零阶本征方程的迭代求解已达到用户的精度要求,则第 $n+1$ 次迭代后的基波本征函数可写成

$$\phi_0^{(n+1)} = \frac{k_0^{n+1}}{\prod_{j=0}^n k_0^{(j)}} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{k_i}{k_0} \right)^{n+1} \phi_i。 \quad (7)$$

由本征值随阶次递减的特性容易看出,和第 n 次外迭代的结果相比,经第 $n+1$ 次迭代后,各阶谐波进一步衰减,但衰减的速率各不相同,阶次越高的谐波衰减得越快,因此可以预期,若比较 $\phi_0^{(n)}$ 和 $\phi_0^{(n+1)}$ 扣除基波后的残差,则在 $\phi_0^{(n+1)}$ 扣除基波后的残差中,一阶谐波将相对更加占优,用此残差作为求解一阶谐波的迭代初值将比其他形式的初值更接近真值。

容易看出,本方法具有较好的理论基础,而且简便易行,不但适用于求解一阶本征值问题,也适用于求解更高阶的问题。下文针对一维问题的数值检验也表明本方法可显著提高高阶本征值问题的计算效率。

2.2 动态收敛判据的应用

求解基波本征值问题时,通常通过检验前后两次迭代结果的偏差来判断迭代过程是否收敛,在将该方法应用于高阶本征值问题求解时,由于随着阶次的增大,收敛速度变慢,因此就不能采用同样的精度标准去判断不同阶次的问题是否已经收敛。另外,利用谐波函数集的双正交性迭代求解各阶谐波

时,需按谐波的阶次顺序求解,即在求解某特定阶次的谐波之前,必须首先求得所有低阶次的正规通量分布 ϕ_i 及共轭通量分布 ϕ_i^* ,因此,低阶谐波的计算误差将在高阶谐波计算中积累,甚至放大。为保证谐波计算的精度,目前一般的做法就是在计算高阶谐波时采用比基波计算更为严格的收敛判据,如将收敛判据从普通基波计算的 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 提高到 10^{-8} ,应该说这样的做法带有经验色彩。

本文从误差分析出发,从理论上导出了一种动态设定收敛判据的新方法,通过这种动态判据的应用,可从理论上保证各阶谐波具有同等的收敛精度。

以基波本征值的求解为例,设用 $k_0^{(\infty)}$ 表示基波本征值的精确解,则经 n 次迭代后的本征值与精确解的偏差为

$$\begin{aligned} (\Delta k)_{\text{real}} &= k_0^{(\infty)} - k_0^{(n)} \\ &= (k_0^{(n+1)} - k_0^{(n)}) + \\ &\quad (k_0^{(n+2)} - k_0^{(n+1)}) + \dots \\ &= (k_0^{(n+1)} - k_0^{(n)}) \cdot \\ &\quad \left(1 + \frac{k_0^{(n+2)} - k_0^{(n+1)}}{k_0^{(n+1)} - k_0^{(n)}} + \dots \right)。 \end{aligned} \quad (8)$$

由(6)式容易导出占优比可近似表示为

$$\sigma_0 = \frac{|k_0^{(n+1)} - k_0^{(n)}|}{|k_0^{(n)} - k_0^{(n-1)}|}。 \quad (9)$$

因此(8)式可写成为

$$\begin{aligned} (\Delta k)_{\text{real}} &\approx (\Delta k)^{(n+1)} [1 + \sigma_0 + \sigma_0^2 + \dots] \\ &= \frac{(\Delta k)^{(n+1)}}{1 - \sigma_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $(\Delta k)^{(n+1)} = k_0^{(n+1)} - k_0^{(n)}$,即迭代至 $n+1$ 次时前后两次特征值结果的差值。

(10)式就为我们提供了一个在迭代过程中估计计算值与精确解偏差的方法。以上过程虽然是以基波本征值的求解为例导出的,但其思想方法同样可方便地应用于所有高阶本征值和諧波的求解中。通过令各阶谐波和本征值与各自精确解的偏差在同一精度水平,就可保证高阶本征值问题的求解精度不随阶次的提高而降低。

3 数值检验

为检验所提出的方法，本文用一维平板单群裸堆问题进行了初步的数值检验。空间离散采用细网有限差分方法。图 1 给出了数值计算所得的前三阶谐波分布。

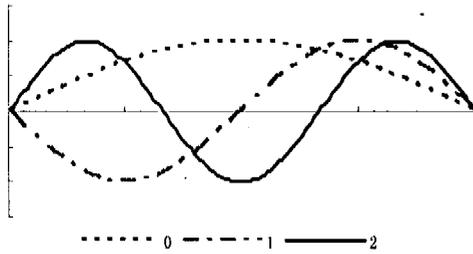


图 1 高阶谐波分布

表 1 给出了在未经其他方法加速情况下，不同迭代初始值设定方法对高阶本征值问题计算效率的影响。从外迭代次数的比较中可看出，总体上本文所提出的迭代初值设定方法可显著提高高阶本征值问题的计算效率。

表 1 不同初值设置方法求解效率的比较

阶数	平初始通量		本文方法	
	迭代次数	特征值	迭代次数	特征值
0	760	1.198 5	760	1.198 5
1	417	1.186 8	3	1.186 8
2	293	1.164 1	7	1.164 1
3	231	1.131 8	264	1.131 8
4	195	1.091 6	4	1.091 6
5	172	1.045 4	47	1.045 4
6	158	9.953 4	159	9.953 4
7	149	9.430 3	5	9.430 3
8	143	8.901 1	56	8.901 1
9	139	8.378 1	134	8.378 1

图 2 给出了针对前述算例，本文所提出的动态

参 考 文 献：

[1] 谢仲生, 吴宏春, 张少泓. 核反应堆物理分析(修订本). 西安: 西安交通大学出版社, 2004.
 [2] 罗征培, 李 富, 王亚奇等. 核科学与工程, 2000, 32: 38.

收敛判据在改善高阶谐波计算精度方面的作用。可以看出，新方法可以较好地保证各阶谐波基本具有相同的精度水平，而若简单地通过前后两次迭代结果的偏差来判断迭代是否收敛，则高阶本征值问题的求解精度将逐渐变差。

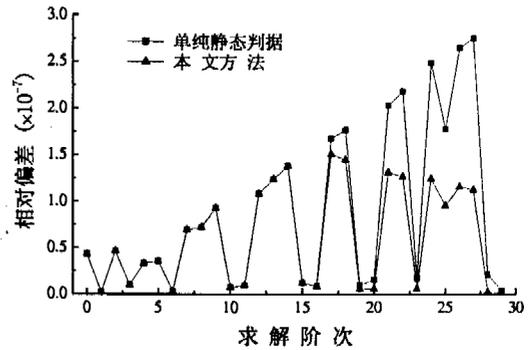


图 2 高阶本征值问题求解精度随阶次变化情况

4 结 论

本文针对反应堆高阶 k 本征值问题的数值求解方法，从理论上提出了适用于任意阶次本征值问题迭代初值设置和收敛精度控制方面的两项改进。通过一维算例的数值检验表明，此两项改进在提高高阶本征值问题计算精度和计算效率方面均有明显的效果。

应该指出的是，虽然目前本文还只是针对一维问题进行了数值检验，但所提的方法同样适用于二维和三维问题。本文所建议的方法也可方便地和常规幂迭代加速方法结合加以使用，从而进一步提高高阶本征值问题的计算效率。目前相关研究工作正在进行之中。

致谢 本工作得到了美国西屋公司 Y. A. Chao 博士的深入指导和热情帮助，作者在此表示诚挚的感谢。

[3] RFSP Program Description, TTR-370, Rev 1, Chapter 5, 1—9.
 [4] 李 富. 重构堆芯通量分布的谐波综合法及其诊断应用. 博士学位论文, 北京: 清华大学, 1994.

An Improved Method for the Numerical Solution of Higher Order Nuclear Reactor k -eigenvalue Problem *

LÜ Dong, ZHANG Shao-hong, WANG Tao

(*Department of Nuclear Science and System Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China*)

Abstract: The solution methods for the higher order harmonics and higher order eigenvalues are not well developed yet in the nuclear reactor engineering. Based on the analysis of the convergence process of power iteration, a new approach for setting the starting values of higher order harmonic flux has been proposed. The results of numerical tests demonstrate that the proposed method could effectively improve the efficiency of calculations of higher order harmonics. In addition, a new type of criterion that judges the convergence of higher order harmonics dynamically has been proposed, it has been verified that the new convergence criterion could effectively prevent the buildup of numerical errors introduced in the solution of lower order harmonics in the solution of higher order harmonics.

Key words: higher order harmonic; numerical method; iteration; convergence criteria

* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (10505015)