文章编号：1007-4627(2012)02-0154-04

偶极场扰动与冷却效应对同步运动的影响

吴木营，罗诗裕，邵明珠
（东莞理工学院电子工程学院，广东 东莞 523106）

摘要：在同步加速器特别是冷却存储环中，偶极场扰动和冷却效应将会对粒子的 Betatron 振荡和同步振荡产生影响。叙述了偶极场扰动对粒子同步运动的影响与高频相位调制等效，重点研究了偶极场扰动与冷却效应同时存在的情况对粒子的同步运动产生的影响。在经典力学框架内把粒子的同步运动方程化为广义的摆方程，然后利用 Melnikov 方法对系统的稳定性进行了分析，讨论了系统进入 Smale 马蹄混沌的物理意义，并导出了系统稳定的临界条件。根据稳定性判据，给出了系统稳定性所需要的偶极场扰动的高频相位调制幅度和冷却系数的限制条件。结果表明，系统的稳定性与它的参数有关，只需适当调节这些参数，混沌便可原则上控制或避免。

关键词：同步运动；偶极场；冷却效应；混沌；稳定性

中图分类号：TL1；TL5 **文献标志码**：A

1 引言

20 世纪 40 年代，人们发现了在高频电场中运动的带电粒子具有保持相位稳定的能力，并指出了，只需适当选择同步相位，即可实现非同步粒子的能量补偿。能量补偿充分显现了同步运动的聚束效应。直到今天，加速器的束流动力学问题依然是人们关注的主要问题之一。随着认识能力的不断提高，人们先后认识了束流动力学的线性、非线性和复杂性，而分叉和混沌则是这种复杂性的典型例子[1−12]。

理想情况下，同步粒子穿越加速缝(隙)的射频(RF)相位是固定的，但是，如果存在 RF 扰动两者就不再同步了。例如，在很多情况下，因为波纹电压、基础振动、机械振动、交通运输，甚至潮汐现象等都可能产生一定频率的射频相位扰动。另外，由于偶极场扰动会使粒子闭合轨道畸变，而畸变了的闭合轨道周长会发生变化，直接影响到同步粒子穿越加速缝的 RF 相位($\Delta\phi=2\pi h(\Delta C/C)$)。当偶极场扰动沿轨道有一种分布时，周长 C 的变化可表示为

$$\Delta C=\oint D(s)\,\frac{\Delta B_z(s)}{B\rho}\mathrm{d}s\ ,$$

其中：$D(s)$是色散函数；$B\rho$ 是磁刚度；$\Delta B_z(s)/B\rho$ 是单位磁刚度的偶极场误差。可见，射频相位调制与偶极场扰动对同步运动的影响是等效的。

另一方面，如果再考虑束流冷却情况将更复杂一些。束流冷却通常是在环形加速器(同步加速器、储存环等)的一个或几个直线段上安装冷却器来实现的。如果在环形加速器中只安装了一个冷却器，称为单重冷却，装有几个冷却器称为多重冷却。当粒子通过冷却器时，用一束冷(发射度小)的电子同它一道运动，并将离子束浸泡其中。如果选择电子的速度与离子速度相等，离子和电子在运动方向保持同步，同时它们之间还将通过“热”运动彼此碰撞不断交换能量，使得比较热的离子束逐渐变冷。换句话说，由于束流冷却，离子的 Betatron 振荡将逐渐衰减，而同步振荡也将逐渐衰减。本文就试图在经典力学框架内对冷却存储环的偶极场扰动和冷却效应进行分析，然后利用 Melnikov 方法分析了系统进入 Smale 马蹄意义下的混沌行为。结果表明，

收稿日期：2011-08-06； **修改日期**：2011-09-28
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10947140)；广东省自然科学基金资助项目(8151170003000010)；东莞市科技计划项目(2008108101002，200918140471，200910814032)
作者简介：吴木营(1961—)，男，河南洛阳人，副教授，从事光电材料与电磁辐射研究。
通讯联系人：罗诗裕，E-mail：luoshy@126.com

系统进入 Smale 马蹄混沌的临界条件与它的参数有关，只需适当调节参数便可以延迟、抑制、避免或控制混沌发生，保持同步运动的稳定性。

2 运动方程

在理想情况下，如果选择相位 ϕ 和动量分散系数 δ 为正则坐标，θ 为独立变数，粒子同步运动方程可表示为[13-17]

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}=h\eta\delta\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{eV}{2\pi\beta^2E}(\sin\phi-\sin\phi_s)\ ,\tag{1}$$

其中：e 是电子电荷；h 是谐波数；V 是加速电压；E 是同步粒子能量；$\beta=v/c$ 是粒子无量纲速度；相移因子 $\eta=1/\gamma_T^2-1/\gamma^2$，而 γ 是粒子无量纲能量，γ_T 是机器转换能量。不失一般性，考虑 $\phi_s=0$ 的稳态情形。当 $\phi_s=0$ 时，方程(1)退化为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}=h\eta\delta\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{eV}{2\pi\beta^2E}\sin\phi\ 。\tag{2}$$

假设，偶极场引起的 RF 相位调制 $\Delta\phi=\pm a\cos(\nu_m\theta)$，并考虑常数冷却，再假设系统的冷却系数为 μ_0，对于动量分散为 δ 的粒子束，经过"长度"为 $\Delta\theta$ 的冷却后，衰减量 $\Delta\delta$ 可表示为 $\Delta\delta=-\mu_0\delta\Delta\theta$。考虑到 RF 相位调制和"冷却效应"后，正则方程(2)化为[7]

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}=h\eta\delta+\nu_m a\sin(\nu_m\theta)\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{eV}{2\pi\beta^2E}\sin\phi-\mu_0\delta\ ,\tag{3}$$

其中：a 是 RF 调制振幅；$\nu_m=\omega_m/\omega_0$；ω_0 是同步粒子回旋频率；ω_m 是 RF 调制频率。下面的推导只考虑位于临界能量之下（$\eta<0$）的同步加速器。由式(3)可得同步运动方程

$$\ddot{\phi}+\mu_0\dot{\phi}+\nu_s^2\sin\phi=$$
$$\nu_m^2 a\cos(\nu_m\theta)+\mu_0\nu_m a\sin(\nu_m\theta)\ ,\tag{4}$$

其中字母上方的两个圆点表示对 θ 的二阶微商。利用三角函数公式，上式可进一步化为

$$\ddot{\phi}+\mu_0\dot{\phi}+\nu_s^2\sin\phi=f_0\sin(\nu_m\theta+\varphi_0)\ ,\tag{5}$$

其中：$\nu_s=\sqrt{h|\eta|eV/2\pi\beta^2E_0}$ 是 $|\cos\phi_s|=1$ 时的同步振荡"频率"（对于 $\eta<0$ 的同步加速器 $\phi_s=0$，对于 $\eta>0$ 的机器 $\phi_s=\pi$）；

$$f_0=a\nu_m\sqrt{\nu_m^2+\mu_0^2}\ ;\quad \varphi_0=\arctan(\mu_0/\nu_m)\ 。\tag{6}$$

方程(5)是一个带有阻尼项和受迫项的广义摆方程。令

$$\tau=\nu_s\theta;\quad 2\mu=\mu_0/\nu_s;\quad f=f_0/\nu_s^2;$$
$$\Omega=\nu_m/\nu_s;\quad \varphi_1=\nu_m\theta_0\tag{7}$$

并用 ξ 代替 ϕ，此时方程(5)可进一步化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2}+2\mu\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}+\sin\xi=f\sin(\Omega\tau+\phi_1)\ 。\tag{8}$$

不失一般性，取方程(8)中的"初相位"$\varphi_1=0$，并假设阻尼项和受迫项是小量，方程(8)可等价地表示为

$$\dot{\xi}=\zeta\ ,$$
$$\dot{\zeta}=-\sin\xi+\varepsilon[-2\mu\zeta+f\sin(\Omega\tau)]\ ,\tag{9}$$

其中 ε 是小参数，表示伴随它的项为 $O(\varepsilon)$ 量级。系统(8)或(9)是一个典型的动力学非线性系统，具有典型的全局分叉性质与混沌行为。下面，利用 Melnikov 方法分析系统在 Smale 马蹄意义上的混沌行为。

3 异宿轨道与异宿轨道的Melnikov函数

3.1 异宿轨道

对无扰动系统有 $\varepsilon=0$，式(9)化为如下形式：

$$\dot{\xi}=\zeta\ ,$$
$$\dot{\zeta}=-\sin\xi\tag{10}$$

的正则方程，其中 $\xi_s=0$ 和 $\xi_u=\pm\pi$ 分别是系统的平衡点和非平衡点。积分一次可得系统的 Hamiltonian 量：

$$H=\frac{\zeta^2}{2}+(1-\cos\xi)\ 。\tag{11}$$

根据 H 的大小，相平面上的轨道可分为异宿（或分支）轨道、振荡型周期轨道和旋转型周期轨道。我们关心的是 $H=2$ 的异宿轨道。这条轨道把相平面分为内外两个区域，且可将它表示为

$$\xi=\pm2\arcsin(th\tau)\ ,$$

$$\zeta=\pm 2\operatorname{sech}\tau\ ,\tag{12}$$

其中，±号表示这条轨道分上下两支。粒子沿这条轨道的周期为无穷。

3.2　异宿轨道的 Melnikov 函数

对于异宿轨道式(12)可构造如下形式的 Melnikov 函数[13－14]

$$\begin{aligned}M_{\pm}^{s}(\tau_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta_{\pm}^{s}(\tau)[-2\mu\zeta_{\pm}^{s}(\tau)+\\&\qquad f\sin\Omega(\tau+\tau_0)]\mathrm{d}\tau\\&=\pm\frac{2f\pi}{ch(\pi\Omega/2)}\left[\frac{2\mu}{\delta_{\pm}^{s}}+\sin(\Omega\tau_0)\right]\ ,\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $\zeta_{\pm}^{s}$ 由式(12)给出，而

$$\delta_{\pm}^{s}=\pm\frac{\pi c_0}{4}；\ c_0=f\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)\right]^{-1}\tag{14}$$

在参数(f，μ)平面上，如果条件

$$\mu\leqslant\left|\frac{\delta_{\pm}^{s}}{2}\right|\tag{15}$$

满足，则对于充分小的 ε，系统(8)的 Poincare 映射在两个不动点的稳定流形和不稳定流形将横向交截，即 Poincare 映射具有 Smale 马蹄意义下的混沌行为[13－14]。

4　Smale 马蹄混沌的物理意义

将式(14)代入式(15)，可将 Smale 马蹄意义下混沌条件用系统参数表示为

$$\left|\frac{8\mu/\pi}{f}\right|<\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)\ 。\tag{16}$$

将式(7)代入式(16)，不等式(16)还可用系统的原始参数进一步表示为

$$\left|\frac{2\mu_0}{f_0}\right|<\frac{\pi}{2\nu_s}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_m}{2\omega_s}\right)\ 。\tag{17}$$

从式(17)可以看出，如果偶极场扰动不存在($f_0=0$)，不等式左端为无穷，式(17)永远不满足，系统不存在 Smale 马蹄意义下的混沌，状态是稳定的；从式(17)还可以看出，偶极场调制越弱(应该是 f_0 越小偶极场调制越弱，式(6)条件越不容易满足。当它达到

$$|f_0|_c=\frac{4\mu_0\nu_s}{\pi\operatorname{sech}(\pi\omega_m/2\omega_s)}\tag{18}$$

时，系统处于临界状态。当 $|f_0|<|f_0|_c$ 系统是稳定的；当 $|f_0|>|f_0|_c$ 时，系统存在 Smale 马蹄意义上的混沌；由式(17)进一步看出，当系统阻尼系数($2\mu_0$)越小时，条件越容易满足；其临界值可表示为

$$(2\mu_0)_c=\left|\frac{\pi f_0\operatorname{sech}(\pi\omega_m/2\omega_s)}{2\nu_s}\right|\ 。\tag{19}$$

也就是说，当阻尼系数满足条件 $2\mu_0>(2\mu_0)_c$ 时，系统是稳定的。

5　结论

本文论述了偶极场扰动对粒子同步运动的影响与高频相位调制等效，重点研究了冷却存储环中偶极场扰动和冷却效应同时存在对同步运动的影响。通过详细的理论推导，利用 Melnikov 方法分析了偶极场扰动和冷却效应同时存在的系统稳定的临界条件和参数分布。最终的研究结果表明，系统的稳定条件是扰动场强度 $|f_0|$ 小于其临界值 $|f_0|_c$。

参考文献(References)：

[1]　DUMAS H S，ELLISON J A，VOGT M. J Appl Dyn Syst (SIAM)，2004，**3**(4)：409.

[2]　LUO Shiyu，SHAO Mingzhu，HU Xiduo. HEP&NP，2004，**28**(1)：96(in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠，胡西多.高能物理与核物理，2004，**28**(1)：96.)

[3]　HU Xiduo，LUO Shiyu，SHAO Mingzhu. HEP&NP，2004，**28**(2)：196(in Chinese).
(胡西多，罗诗裕，邵明珠，等. 高能物理与核物理，2004，**28**(2)：196.)

[4]　DERBENEV Y. Phys Rev，2005，ST Accel Beams **8**：041002.

[5]　QIANG J，LIDIA S，RYNE R D. Phys Rev 2006，ST Accel Beams **9**：044204.

[6]　WIEDEMANN H. Particle Accelerator Physics. Berlin：Springer，2007，215－221.

[7]　LEE S Y. Accelerator Physics(2nd Edition). Shanghai. Fudan University Press，2006，309－315.

[8]　SCHROEDER C B，SHADWICK B A，ESAREY E，*et al*. Phys Rev E，2006，**74**：026501.

[9]　FERRARIO M，ALESINI D，BACCI A，*et al*. Phys Rev Lett，2007，**99**：234801.

[10]　STOKES R H，CRANDALL K R，STOVALL J E. IEEE

Transactions on Nuclear Science , 2007, **26** (3): 3469.

[11] ZHANG Z L, JAMESON R A, ZHAO H W, *et al*. Nucl Instr & Meth B, 2008, **592** (3): 1972.

[12] PIEL C, DUNKEL K, KREMER F, *et al*. Proceeding of EPAC08, Genoa, Italy. 2008, 126.

[13] LIU Huijie, LUO Shiyu, SHAO Mingzhu. Nuclear Physics Review, 2011, **28**(2): 191 (in Chinese).
(刘慧杰，罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2011，**28**(2)：191.)

[14] XIAO Huijuan, LUO Shiyu, SHAO Mingzhu. Nuclear Physics Review, 2011, **28**(3): 300(in Chinese).
(肖慧娟，罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2011，**28**(3)：300.)

[15] FAN Lixian, LUO Shiyu, SHAO Mingzhu. Nuclear Physics Review, 2011, **28**(1): 63(in Chinese).
(范丽仙，罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2011，**28**(1)：63.)

[16] LI Hongtao, LUO Shiyu, SHAO Mingzhu. Nuclear Physics Review, 2011, **28**(4): 454(in Chinese).
(李洪涛，罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2011，**28**(4)：454.)

[17] ZHANG Mei, SHAO Mingzhu, LUO Shiyu. Nuclear Phyics Review, 2007, **24**(4): 318(in Chinese).
(张梅，罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2007，**24**(4)：318.)

Effect on Synchrotron Motion Caused by Dipole Field Perturbation and Cooling

WU Mu-ying, LUO Shi-yu, SHAO Ming-zhu

(*Dongguan University of technology*, *Dongguan* 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: The Betatron oscillation and the synchrotron oscillation for the particles are effected by the dipole field perturbation and the cooling effect. Both effects are considered in the paper and the synchrotron motion equation of the particle in the synchroton is reduced to the general pendulum equation in the classical mechanics frame. The stabilities of the system caused by dipole field perturbation and cooling are analyzed by using Melnikov method. The thresholds entered a Smale horseshoe chaos are derived in detail and the stability conditions for the system caused by dipole field perturbation and cooling are dicussed. The results show that the critical condition or the stability thresholds are related to the system parameters. The chaos or an instability can be avoided or controlled in principle by regulating some parameters of the system.

Key words: synchrotron motion; dipole field; cooling effect; chaos; stability

Received date: 6 Aug. 2011; **Revised date**: 28 Sep. 2011

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (10947104); Natural Science Foundation of Guangdong Province (8151170003000010); Dongguan Science and Technology Program(2008108101002, 2009108140471, 200910814032)

Corresponding author: LUO Shi-yu, E-mal: luoshy@126.com