

文章编号: 1007-4627(2017)03-0425-06

## r-过程路径核 $\beta^-$ -衰变半衰期的估算

周勇, 李志宏, 陈永寿, 王友宝, 苏俊, 郭冰, 柳卫平

(中国原子能科学研究院, 北京 1024131)

**摘要:** 分析了  $20 < A < 190$  范围内丰中子核  $\beta$  衰变的实验数据, 根据半衰期随质子数、中子数以及衰变能变化所呈现的壳效应对效应等特点, 提出了一种有效估算丰中子核  $\beta$  衰变寿命的公式。新的计算公式形式简单包含了较少的参数、计算量小。用该公式能较为准确地再现丰中子核的  $\beta$  衰变半衰期。用 RIKEN 最新测量丰中子核半衰期检验了该公式的外推能力, 本工作可以为 r-过程研究提供可靠的输入数据。

**关键词:**  $\beta$  衰变寿命; 丰中子核; r-过程; 壳效应; 对效应

**中图分类号:** O571.22      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.11804/ NuclPhysRev.34.03.425

### 1 引言

宇宙中元素起源是核天体物理学的重要研究任务。宇宙中铁以上的元素主要通过中子俘获过程形成, 其中沿着中子滴线附近进行的快速中子俘获过程(简称 r-过程)被认为贡献了铁以上重元素一半的来源<sup>[1, 2]</sup>。r-过程涉及大量丰中子核素, 这些核素的  $\beta$  衰变半衰期是 r-过程研究中最为重要的输入量。然而, 由于缺乏实验数据, r-过程路径还有很大的不确定性。从费米  $\beta$  衰变理论<sup>[3]</sup>后, 不少理论和实验物理学家对  $\beta$  衰变开展了深入细致的研究。 $\beta$  衰变寿命的研究方法主要分为宏观方法(如 Gross Theory<sup>[4, 5]</sup>)和全(半)微观方法(如壳模型计算)以及介于两者之间用不同方法描述跃迁初末态而建立的若干近似方法, 这些方法通常都是基于描述复杂量子系统部分特性的多参量模型(例如 Kratz-Herrmann 公式<sup>[6]</sup>、半经典有限力程液滴模型结合准粒子无规相近似方法 FRDM+QRPA、微观 DF3 密度泛函结合 QRPA 方法、Hartree-Fock-Bogoliubov 理论结合 QRPA 方法<sup>[7, 8]</sup>)。其中, 带有全局参量的 Gross Theory 用有限的计算能力较好地再现了实验数据, 但对远离稳定线核预测的可靠性则有待检验; 微观模型预测的能力好, 但相比宏观近似, 其精度还不够让人满意。另外, 壳模型方法计算重核时不可避免的会遇到组态空间和维度暴增计算量过于庞大的问题, 计算一个核素寿命的时间长达数周。最近一种估算远离稳定线核  $\beta$  衰变寿命的指数规律计算公式<sup>[9]</sup>用拟合实验数据所得参数较好的再现了丰中子核  $\beta$  衰变寿命, 为  $\beta$  衰变寿命计算提供了新思路。r-过程核素的网络计算需要大量的

靠近滴线核素的半衰期数据, 因此需要一种计算量小且准确可靠的计算方法来估算 r-过程路径核的衰变寿命。

本文系统分析了丰中子核  $\beta$  衰变寿命与衰变能、质子数和中子数间的实验规律, 提出一种有效计算远离稳定线丰中子核  $\beta$  衰变寿命的公式, 该公式中包含的参数可以通过拟合现有的实验数据得到。在考虑了  $\beta$  衰变寿命随质子数和中子数变化呈现的壳效应对效应修正后, 该公式明显地改善了对丰中子核  $\beta$  衰变寿命的重现情况, 可以用于预测实验尚未测定的远离稳定线丰中子核  $\beta$  衰变寿命, 对 r-过程重元素的合成研究具有重要意义。

### 2 丰中子核 $\beta$ 衰变的特点

根据费米理论, 不稳定核  $\beta$  衰变的半衰期可以表示为

$$t_{1/2} = \ln 2 / \Lambda, \quad (1)$$

这里  $\Lambda$  为衰变宽度, 且有

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_j \Lambda_j \\ &= \sum_j \frac{1}{2\pi^3} \frac{m_e^5 c^4}{\hbar^7} \int_1^{\omega_j} C(\omega) F(Z, R, \omega) p \omega (\omega_0 - \omega)^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

上式中  $j$  遍及所有可能的终态,  $F(Z, R, \omega)$  为  $j$  态的相空间因子, 其中  $Z, R$  分别为衰变子核的质子数和电荷分布半径,  $R = r_0 A^{1/3}$ ;  $p, \omega_j$  分别为发射的电子以  $m_e c$  为单位的动量和以电子静止能量  $m_e c^2$  为单位的能量, 即  $\omega_j = \frac{E_e}{m_e c^2} = \frac{Q - E_j}{m_e c^2}$ ;  $\omega_0$  为  $\omega_j$  取最大值的

收稿日期: 2016-12-09; 修改日期: 2017-05-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11321064)

作者简介: 周勇(1992-), 男, 四川广安人, 硕士研究生, 从事粒子物理与原子核物理研究; E-mail: zhou\_yx@foxmail.com.

情况, 即终态为基态  $E_j=0$ 。对于 GT 跃迁, 跃迁矩阵元与电子能量无关,  $C(\omega)=B(GT^-)$ , 后者表示核矩阵元的平方, 它只决定于母核与子核的波函数且描述了跃迁过程有关核结构的信息; 对于一级禁戒跃迁 (FF 跃迁),  $C(\omega)=K_0+K_1\omega+K_{-1}/\omega+K_2\omega^2$ , 其中  $K_0, K_1, K_{-1}$  和  $K_2$  表示依赖于  $0^-, 1^-, 2^-$  跃迁的核矩阵元<sup>[10]</sup>。式 (2) 给出  $\beta$  衰变到子核各个可能态的分宽度计算, 除了依赖于  $Z, R$  以及衰变能  $Q$  之外,  $\Lambda_j$  决定于跃迁矩阵元。丰中子核  $\beta$  衰变有如下几个规律需要考虑。

(1) r-过程所关心的丰中子核  $\beta$  衰变类型主要为容许跃迁, 只有少量核的 FF 跃迁有明显贡献, 通常  $Z$  增大时 FF 跃迁的贡献会有所增加<sup>[10]</sup>, 而更高级的禁戒跃迁在 r-过程研究中可以完全忽略。

(2)  $\beta$  衰变寿命与衰变能  $Q$  的近似关系符合萨金特定律, 如图 1, 其中衰变率以及原子质量采用了 Tuli 等<sup>[11]</sup>所给评价。但 r-过程路径核为远离稳定线的丰中子核, 由于衰变能通常较大, 可以从母核基态跃迁到子核多个能级, 每个跃迁的矩阵元不同, 所以不能用描述单个跃迁的萨金特定律<sup>[12]</sup>准确描述,

$$\log t_{1/2} = c_1 - c_2 \log Q \quad (3)$$

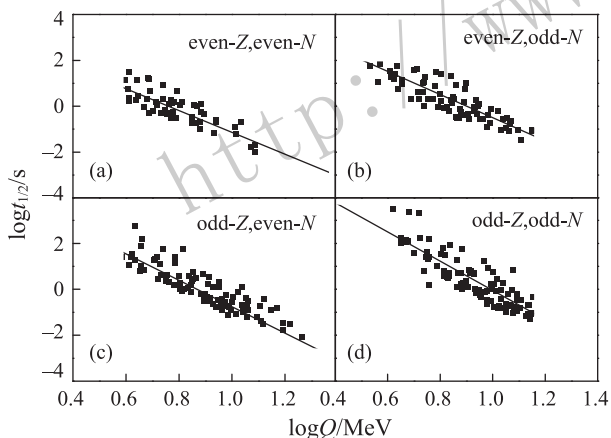


图 1  $\beta^-$  衰变寿命与衰变能  $Q$  存在式 (3) 中的近似关系,  $\beta$ -半衰期及原子质量来自 Nuclear Wallet Cards<sup>[11]</sup>

本文取中子数比稳定线上中子数大 5 以上的丰中子核  $\beta$  衰变实验数据 (在此总共 350 个核), 在母核质子数与中子数分别为奇数和偶数情况下分别由最小二乘法得到  $c_1, c_2$  的值。图 1(a) 中  $c_1, c_2$  分别为 3.69, 4.80; (b) 中  $c_1, c_2$  分别为 4.59, 5.08; (c) 中  $c_1, c_2$  分别为 4.98, 5.53; (d) 中  $c_1, c_2$  分别为 6.32, 6.34。在  $Q$  值

较小时数据离散更严重, 这是由于  $\beta$  跃迁过程中各种选择定则造成, 如自旋宇称, 且这种影响随着子核合适的终态数减少而加剧, 而在  $Q$  较大时终态数目大且离散减小。

(3) 奇偶效应是  $\beta$  衰变过程中存在的一种明显的效应, 且  $\beta$  衰变寿命  $\ln t_{1/2}$  随衰变能  $Q$  的变化以及随中子数  $N$  和质子数  $Z$  的变化趋势中都表现得非常强烈, 如图 2 和图 3。中子数为奇数的核素其半衰期比临近的偶数核的半衰期大, 因此在计算丰中子核  $\beta$  衰变寿命时必须考虑该效应。

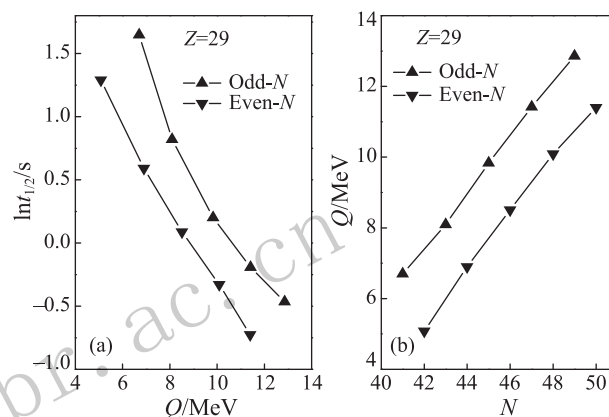


图 2  $\beta$  衰变寿命  $\ln t_{1/2}$  随衰变能  $Q$  的变化趋势中存在强烈的奇偶交替 (a) 以及衰变能  $Q$  随中子数  $N$  的变化也存在着强烈的奇偶交替 (b)

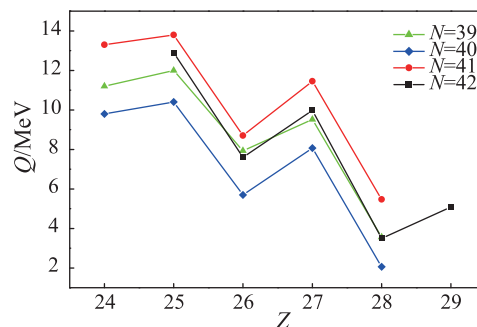


图 3 (在线彩图) 与上图相似, 衰变能  $Q$  随质子数  $Z$  的变化也存在着强烈的奇偶交替

(4)  $\beta$  衰变寿命随质子数和中子数的变化存在壳效应。在不考虑壳效修正项计算  $\beta$  衰变寿命的过程中, 发现计算值与实验值在  $Z$  为 20, 38, 50, 58;  $N$  为 28, 50, 82 等幻数处偏差达到最大, 计算值比实验值小很多, 如图 4。 $\beta$  衰变寿命随质子数和中子数的变化存在明显的壳效应特点, 因此在计算丰中子核  $\beta$  半衰期时应该对该效应加以考虑。

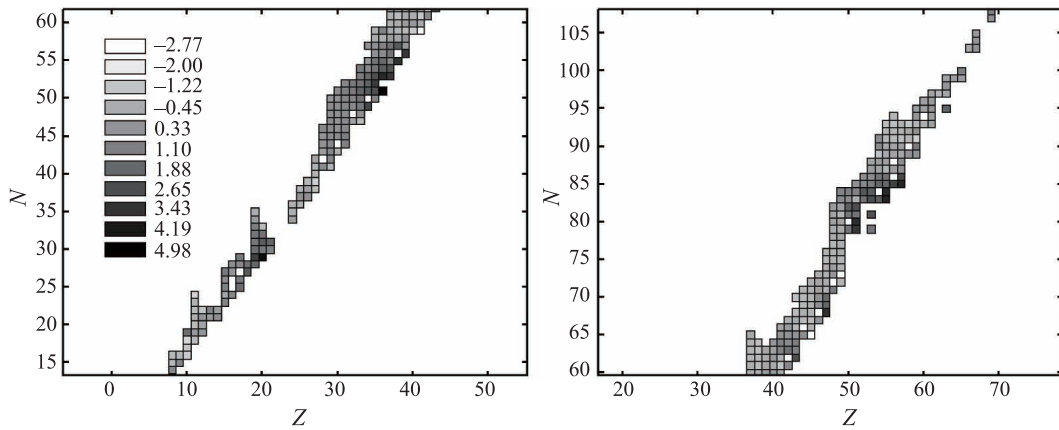


图 4 不考虑壳效应修正项时半衰期计算值与实验值偏差分布

计算值与实验值的偏差在  $Z$  为 20, 38, 50, 58;  $N$  为 28, 50, 82 等幻数处达到最大, 图中灰色深浅表示偏差的大小, 颜色越深表示偏差越大。

### 3 远离稳定线丰中子核 $\beta$ 衰变寿命计算的新公式

式 (2) 计算衰变宽度时需要先确定跃迁矩阵元和相空间因子。衰变能大于 3 MeV 的丰中子核产生的  $\beta$  粒子速度为光速的 99% 以上, 此时相空间因子可以取极端相对论情况下的近似表达式 (4)<sup>[13, 14]</sup>。

$$F(Z, R, \omega) = 2(1 + \gamma)(2pR)^{2(\gamma-1)} e^{\pi\nu} \left| \frac{\Gamma(\gamma + i\nu)}{\Gamma(2\gamma + 1)} \right|^2 \cdot \approx \frac{p}{\omega} (2pR)^{-\alpha^2 Z^2} e^{\pi\nu}, \quad (4)$$

其中  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt (x > 0)$ ,  $\gamma = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}$ ,  $\nu = \frac{\alpha Z \omega}{p}$ ,  $\alpha$  为精细结构常数 1/137。本文所考虑 r-过程路径核  $\beta$  衰变以容许跃迁为主, FF 跃迁的少量贡献可以作为  $\beta$  衰变寿命计算的修正, 将式 (4) 带入式 (2) 可积分近似得到式 (5),

$$\Gamma_j = \frac{1}{2\pi^3} \frac{m_e^5 c^4}{\hbar^7} \frac{c^3}{30} (2R)^{-\alpha^2 Z^2} e^{\alpha Z \pi} \left( \frac{\omega_j m_e c^2}{c} \right)^{5 - \alpha^2 Z^2} \times B(GT^-). \quad (5)$$

$\beta$  衰变到子核  $j$  态时有  $\omega_j m_e c^2 = Q - E_j$ , 当衰变到子核基态时有  $\omega_j m_e c^2 = Q$ 。式 (5) 给出计算  $\beta$  衰变寿命  $\ln t_{1/2}$  的表达式中应包含  $\alpha^2 Z^2 \ln(2R)$ ,  $(\alpha^2 Z^2 - 5) \ln Q$  以及  $-\alpha Z \pi$  三项, 其中第二项  $\beta$  衰变寿命与衰变能  $Q$  的关系即为式 (3) 右。假设衰变布居子核的终态数量非常大, 式 (2) 中的求和可以用积分近似计算, 那么  $(\alpha^2 Z^2 - 5) \ln Q$  项将会变成  $(\alpha^2 Z^2 - 6) \ln Q$  项, 而真实的衰变情况将给出介于二者之间的结果, 且靠近稳定线方向更接近前者, 远离稳定线方向更接近后者, 因此

本工作考虑采用  $(\alpha^2 Z^2 - 5 - a(N - Z)/A) \ln Q$  项, 其中中子过剩  $a(N - Z)/A$  项描述了丰中子核远离稳定线的程度,  $Q$  值则可以由目前精度较高的原子质量表<sup>[15]</sup> 计算得到, 通常计算  $Q$  值与实验  $Q$  值偏差仅 5% 左右, 该项能很好的描述同位素链上丰中子核半衰期变化趋势。

$\beta$  衰变寿命与核结构有关的部分包含在矩阵元中, 主要体现为奇偶效应和壳效应。其中  $\beta$  衰变寿命随衰变能  $Q$  的变化存在的奇偶效应由式 (6) 能够得到很好的描述,

$$\delta = (-1)^N + (-1)^Z. \quad (6)$$

由于原子质量计算<sup>[15]</sup> 中包含了奇偶能, 因此  $\beta$  衰变寿命随中子数  $N$  的变化存在的奇偶效应则已经包含在  $Q$  值的计算中。

如图 4 所描述的  $\beta$  衰变半衰期的壳效应在质子数或者中子数为幻数时表现强烈, 由式 (7) 能够较好的描述,

$$S(Z, N) = a_1 e^{-((N-28)^2 + (Z-20)^2)/12} + a_2 e^{-((N-50)^2 + (Z-38)^2)/43} + a_3 e^{-((N-82)^2 + (Z-50)^2)/13} + a_4 e^{-((N-82)^2 + (Z-58)^2)/24} + a_5 e^{-((N-110)^2 + (Z-70)^2)/244}, \quad (7)$$

其中  $S(Z, N)$  只有在  $Z$  为 20, 38, 50, 58;  $N$  为 28, 50, 82 等幻数附近才有较大的值, 在  $Z$  和  $N$  远离幻数时接近 0。

由以上得到的半衰期与衰变能、电荷、中子过剩、奇偶效应以及壳效应等变化规律, 可以得到一个很好的计算远离稳定线丰中子核  $\beta$  衰变寿命的新公式 (8)。完整的壳效应修正应该包含所有幻数, 包括主壳层幻数和子壳层幻数, 但考虑到再现实验数据的范围, 式 (7) 中

只包含对计算值有显著影响的幻数做壳效应修正。

$$\ln t_{1/2} = a_6 + \left( \alpha^2 Z^2 - 5 - a_7 \frac{N-Z}{A} \right) \ln(Q - a_8 \delta) + a_9 \alpha^2 Z^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 Z^2 \ln A - \alpha Z \pi + S(Z, N), \quad (8)$$

式(8)中第二项对丰中子核β衰变实验数据的再现影响最大,最为重要,它的变化显著依赖于衰变能Q,通常Q值计算误差20%会导致半衰期计算误差达到1倍,因此Q计算的准确性以及对该项拟合的准确性直接影响整个拟合的精度;第三、四、五项随Z和N的变化非常平缓,且对总的数值贡献较小;壳修正的项则对幻数附近的核有明显的贡献,远离幻数的区域贡献几乎为0。

β-半衰期的计算值 $(t_{1/2})_{cal}$ 与实验值 $(t_{1/2})_{exp}$ 的比值能反映本工作β-半衰期新公式再现实验数据以及

外推的能力。在此定义计算值与实验值的平均偏差:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2}, \text{ 其中, } r_i = \log \left( \frac{(t_{1/2})_{cal}}{(t_{1/2})_{exp}} \right). \quad (9)$$

这里 $\sigma_r$ 为n个核β半衰期计算值与实验值的平均偏差, $\sigma_r$ 越接近0,则计算值与实验值符合得越好。

通过拟合所取350个丰中子核(中子数比稳定线上中子数大5以上)β半衰期实验数据,可以得到式(8)中待定参数: $a_i(i=1,2,\dots,5)$ 分别为3.016, 3.879, 1.322, 6.030, 1.669;  $a_i(i=6,7,8,9)$ 分别为11.09, 1.07, -0.935, -5.398。图5分别给出了Z=19, 30, 34, 57时半衰期的实验值与计算值以及文献[9]指数规律方法结果的比较。再现本文所取350个丰中子核β半衰期实验值时,所得均方根偏差 $\sigma_r$ 仅为0.228,即式(8)的计算值 $(t_{1/2})_{cal}$ 平均为实验值 $(t_{1/2})_{exp}$ 的1.69倍;

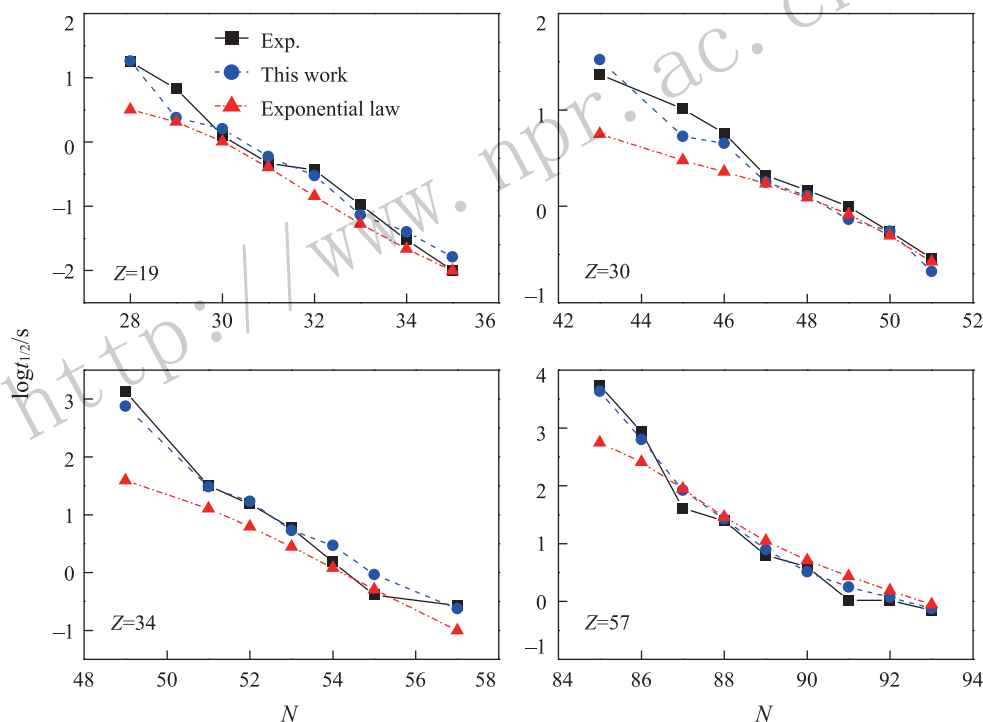


图 5 (在线彩图) 本工作(8)式能很好的再现远离稳定线丰中子核β衰变寿命的实验数据

图中分别给出了K, Zn, Se和La同位素链远离稳定线β衰变实验数据的再现情况,同时给出了与β衰变寿命的指数规律计算方法[9]结果的比较。

且有308个(88%)核计算值 $(t_{1/2})_{cal}$ 为实验值 $(t_{1/2})_{exp}$ 的3倍以内,有261个(74.6%)核计算值 $(t_{1/2})_{cal}$ 为实验值 $(t_{1/2})_{exp}$ 的2倍以内。

#### 4 新公式的外推能力检验

为了展示式(8)对r-过程路径核半衰期的预测能

力,分别对Zr, Rb等元素进行了预测,并与RIKEN测量最新的半衰期实验值[16, 17]进行对比,结果示于图6中。其中Zr同位素链上, $N=59\sim 65$ 的核半衰期包含在拟合范围内, $N=66\sim 72$ 的半衰期为外推计算;Rb同位素链上, $N=54\sim 65$ 包含在拟合范围内, $N=66$ 为外推计算;Sr同位素链上, $N=55\sim 64$ 包含



在拟合范围内,  $N = 65 \sim 68$  为外推计算; Y 同位素链上,  $N = 57 \sim 65$  包含在拟合范围内,  $N = 66 \sim 70$  为外推计算。外推计算该 17 个核的半衰期时, 所得均方根离差  $\sigma_r$  仅为 0.061, 即计算值  $(t_{1/2})_{\text{cal}}$  平均为实验值  $(t_{1/2})_{\text{exp}}$  的 1.15 倍。图 6 的结果也显示出另外一个有意思的现象, 式 (8) 外推 Zr, Sr, Y 等核的计算时与实验值的偏差比再现包含在拟合范围内的实验数据的偏

差更小。

向中子数更大没有实验数据的核外推计算, 新公式的结果与 FRDM+QRPA 等微观模型计算的结果比较接近, 在  $N$  较大的极端远离稳定线处的结果比 FRDM+QRPA(rea) 方法<sup>[17]</sup> 结果略微偏大, 而与文献[9]的指数规律计算方法的结果在趋势上有很大的差异。

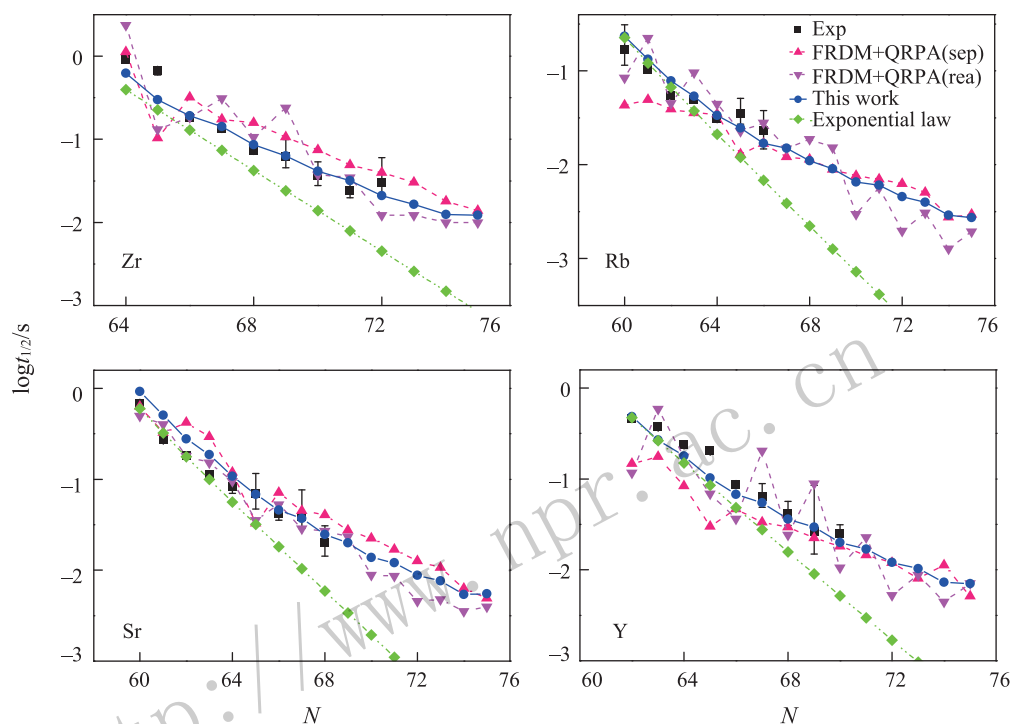


图 6 (在线彩图) 本工作式 (8) 外推计算 Zr, Rb, Sr 和 Y 同位素链远离稳定线没有  $\beta$  衰变寿命实验数据的核计算结果比 FRDM+QRPA(rea) 方法<sup>[17]</sup> 略偏大, 当外推较远时与文献[9]的指数规律计算方法的结果相差很远。

## 5 结论

本工作从  $\beta$  衰变费米理论和实验数据出发, 较为系统地分析了丰中子核  $\beta$  衰变寿命与质子数  $Z$ , 中子数  $N$  及衰变能  $Q$  之间的关系, 考虑奇偶效应和壳效应对  $\beta$  衰变寿命的修正, 得到了能计算远离稳定线丰中子核  $\beta$  衰变寿命的新公式。新公式包含的参数少, 计算量小, 计算结果与  $\beta$  衰变微观方法的结果相近, 具有良好的外推能力, 可用于预测尚没有实验数据丰中子核  $\beta$  衰变寿命, 适合大范围估算 r-过程路径核的寿命, 为网络计算提供可靠输入数据, 能为以后的实验测量提供一定参考价值。

### 参考文献:

- [1] ILIADIS C. Nuclear Physics of Stars[M]. Berlin: Wiley-VCH, 2007: 536.
- [2] SUESS H E, UREY H C. Rev Mod Phys, 1956, **28**(1): 53.
- [3] FERMI E. Z Phys, 1934, **88**(161): 19.
- [4] TAKAHASHI K, YAMADA M. Prog Theor Phys, 1969, **41**(6): 1470.
- [5] TACHIBABA T, YAMADA M, YOSHIDA Y. Prog Theor Phys, 1990, **84**(4), 641.
- [6] KRATZ K L, HERRMANN G. Z Phys, 1973, **263**(5): 435.
- [7] MÖLLER P, NIX J R, KRATZ K L. At Data Nucl Data Tables, 1997, **66**(2): 131.
- [8] NI D D, REN Z Z, ZHI Q J. Sci China: Phys Mech Astron, 2012, **55**(12): 2397.
- [9] ZHANG X P, REN Z Z, ZHI Q J, *et al.* J Phys G, 2007, **34**(12): 2611.
- [10] SUZUKI T, YOSHIDA T, KAJINO T, *et al.* Phys Rev C, 2012, **85**(1): 015802.
- [11] TULI J K. Nuclear Wallet Cards, National Nuclear Data Center. Brookhaven National Laboratory, 2005.
- [12] SARGENT B W. Proc R Soc London Ser A, 1933, **139**(839): 659.
- [13] HOLSTEIN B R. Phys Rev C, 1979, **19**(4): 1467.
- [14] LOGUE L J, CHERN B. Phys Rev, 1968, **175**(4): 1367.

- [15] WANG N, LIU M. Phys Lett B, 2014, **734**: 215.  
[16] LORUSSO G, NISHIMURA S, XU Z Y, *et al.* Phys Rev Lett, 2015, **114**(19): 192501.  
[17] FANG D L, BROWN B A, SUZUKI T. Phys Rev C, 2013, **88**(2): 024314.  
[18] BORZOV I N. Nucl Phys A, 2006, **777**: 645.

## Estimate of $\beta^-$ -decay Half-lives for r-process Nuclei

ZHOU Yong, LI Zhihong, CHENG Yongshou, WANG Youbao, SU Jun, GUO Bing, LIU Weiping  
(*China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China*)

**Abstract:** Experimental data of the  $\beta^-$ -decay half-lives for the nuclei with atomic number between 20 and 190 are investigated. We have systematically studied the shell effects and pairing effects on  $\beta^-$ -decay half-lives versus the decay energy  $Q$  and nucleon numbers ( $Z$ ,  $N$ ). An empirical formula has been proposed to calculate the  $\beta^-$ -decay half-lives of neutron-rich nuclei. The empirical formula is simple and has relatively few parameters. Experimental  $\beta^-$ -decay half-lives of the neutron-rich nuclei are well reproduced by the new formula. In addition, the extrapolating capacity of this formula has been checked with the very recent experimental data from RIKEN. The predicted half-lives for r-process relevant nuclei with the current formula can be served as the reliable input of r-process model calculations.

**Key words:**  $\beta^-$ -decay half-life; neutron-rich nuclei; r-process; shell effect; pairing effect

<http://www.npr.ac.cn>

**Received date:** 9 Dec. 2016; **Revised date:** 12 May 2017

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(11321064)

1) E-mail: [zhou\\_yx@foxmail.com](mailto:zhou_yx@foxmail.com).