文章编号：1007-4627(2011)02-0191-04

高频电压调制对同步运动的影响*

刘慧杰，罗诗裕#，邵明珠

（东莞理工学院电子工程学院，广东 东莞 523106）

摘 要：从系统的扰动 Hamiltonian 出发，在经典力学框架内小振幅近似下，把粒子的纵向运动方程化为 Mathieu 方程，指出了由于扰动的存在，准等时同步加速器出现了一系列新的共振线。用摄动法导出了一阶不稳定区的边界曲线和禁带宽度；指出了当粒子穿越禁带后的振幅与同步加速器的两个不稳定点相位相等时，系统处于临界状态；并由此导出了高频电压调制振幅的临界值。

关 键 词：同步加速器；相运动；高频调制；Mathieu 方程；稳定性

中图分类号：TL1；TL5 **文献标识码**：A

1 引言

1944 年，苏联物理学家维克斯勒(次年，麦克米兰)发现[1-3]，在高频电场中运动的带电粒子具有保持相位稳定的能力，并指出适当选择同步相位，即可实现非同步粒子的能量补偿。例如，对于能量小于转变能量的机器，可选择同步相位 $0<\phi_s<\pi/2$；对于能量大于转变能量的机器，可选择同步相位 $\pi/2<\phi_s<\pi$。能量的补偿效应充分显现了粒子纵向(相)运动的聚束效应。但是，由于扰动的存在，粒子的运动将受到影响。例如，高频噪声、电源波纹和机械振动等因素的影响。高频噪声是无规的，频率很高；电源波纹和机械振动是周期的，频率比较低。值得注意的是，正是这些扰动不可避免地对粒子的同步运动产生影响。事实上，在很多同步加速器中，人们都先后观察到了高频噪声对束流稳定性的影响。例如，在欧洲核子研究中心(CERN)的超质子同步加速器(SPS)上就曾发现过[4]，并在单频近似和线性近似下进行了描述，导出了高频调制频率满足的临界条件。本文在小振幅近似下，讨论了高频电压调制振幅对粒子纵运动稳定性的影响，导出了高频电压调制振幅的临界条件。首先，从系统的扰动 Hamiltonian 出发，把粒子的纵向运动方程化为 Mathieu 方程，并用摄动法导出了一阶不稳定区的边界曲线和禁带宽度。指出了由于扰动存在，当粒子穿越禁带后的振幅 $\phi=\phi_0+\Delta\phi$ 与同步加速器的两个不稳定点(相位)相等时，粒子处于临界状态；由此导出了高频电压调制振幅的临界值 b_c。当 $b<b_c$ 时，系统是稳定的，否则系统不稳定。

2 运动方程

同步运动受高频(rf)电压调制后，系统的 Hamiltonian 可以表示为[4]

$$H=H_0+\Delta H\ , \tag{1}$$

其中无扰动系统的 Hamiltonian 量为

$$H_0=\frac{1}{2}\nu_s P^2+\nu_s(1-\mathrm{con}\phi)。 \tag{2}$$

其中，$\nu_s=\sqrt{h|\eta|eV/2\pi\beta^2E_0}$ 是 $|\cos\phi_s|=1$ 时，粒子的同步振荡频率(η 是相移因子，V 是加速电压，E_0 是粒子能量，$\beta=v/c$ 是粒子无量纲速度)；ϕ 和 P 是正则变数。扰动 Hamiltonian 量为

$$\Delta H=\nu_s b\sin(\nu_m\theta+\chi_0)(1-\cos\phi), \tag{3}$$

其中 $b=\Delta V/V$ 是高频电压调制幅值，ν_m 是高频调制“频率”，χ_0 是高频调制信号初相位。注意到正则

* **收稿日期**：2010-08-11；**修改日期**：2010-09-12

* **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(10947140)；广东省自然科学基金资助项目(10451170003004948)；东莞市科技计划项目(2008108101002，200910814047)

作者简介：刘慧杰(1979－)，女(汉族)，河南新乡人，讲师，博士生，从事非线性动力学与混沌保密通信研究。

通讯联系人：罗诗裕，E-mail：luoshy@126.com

方程由

$$\dot{\phi}=\frac{\partial H(\phi,P)}{\partial P},\quad \dot{P}=-\frac{\partial H(\phi,P)}{\partial \phi} \tag{4}$$

给出，令

$$\delta=\frac{4\nu_s^2}{\nu_m^2},\ \varepsilon=\frac{2b\nu_s^2}{\nu_m^2},\ \chi_0=\frac{\pi}{2},\ z=\frac{\nu_m\theta}{2}。 \tag{5}$$

对于 $\eta<0$ 的情况，在小振幅近似($\sin\phi\approx\phi$)下，由式(1—5) 可得粒子的运动方程：

$$\frac{d^2\phi}{dz^2}+(\delta+2\varepsilon\cos 2z)\phi=0\ 。 \tag{6}$$

方程(6)是一个标准的 Mathieu 方程。一次项的系数是 θ 的周期函数。根据 Flogue 定理，方程(6)的解具有如下性质：

$$\phi(z+T)=e^{ikT}\phi_k(z),$$

其中 T 是周期。上式表明，函数 $\phi(z+T)$ 和 $\phi_k(z)$ 只差一个模为 1 的相因子。Bloch 进一步证明上式中的 $\phi_k(z)$ 也是周期函数，其周期与外场周期相同。设外场周期为 T_0，则有

$$\phi_k(z+T_0)=\phi_k(z),$$

具有这种性质的波函数称为 Bloch 波函数。根据 Bloch 定理，粒子在周期中场运动时，它的能级将分裂成带。

事实上，系统的稳定性与参数(δ，ε)的分布有关。在参数(δ，ε)平面上，系统出现了一系列稳定和不稳定区，如图 1 所示。当 $|\varepsilon|\to 0$ 时，如果 $\delta>0$，系统是稳定的；$\delta<0$ 系统不稳定。不过，随着 $|\varepsilon|$ 的增加，即使 $\delta<0$，系统也可能是稳定的。由于方程(6)包含振动部分 $\cos 2z$，在 $\delta>0$ 的右半平面内出现了一系列稳定区和不稳定区。当 $|\varepsilon|\to 0$ 时，这些不稳定区退化为一点，且全都落在 $\varepsilon=0$ 的横轴上，这些点由

$$\delta=n^2,\ n=1,2,3,\cdots$$

给出，并分别称为一阶、二阶、三阶等不稳定区。注意到 $\delta=4\nu_s^2/\nu_m^2$，可将各阶不稳定区用系统参数表示为 $\nu_s=\nu_m/2$，ν_m，$3\nu_m/2$，… 。这就是说，由于高频电压调制，系统的同步运动同高频调制相互作用，在 $\nu_s=\nu_m/2$，ν_m，$3\nu_m/2$，… 处出现了共振。图 1 给出了数值结果。一般说来，在参数(δ，ε)平面上，这种稳定区和不稳定区有无限多个，但实际上，对于具体情况只有一个或少数几个稳定区和不稳定区起作用。下面对一阶不稳定区($\nu_s=\nu_m/2$)进行分析，并导出高频电压调制振幅的临界条件。

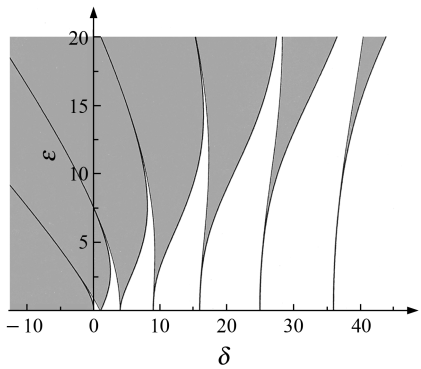

图 1 Mathieu 方程的稳定区与不稳定区(阴影区域)

3 Mathieu 方程的一阶不稳定区及其禁带宽度

利用摄动法求解方程(6)。注意到方程(6)中的 ε 是一个小参数，可将 $\phi(z)$ 和 δ 按 ε 展开[5-9]

$$\phi(z,\varepsilon)=\phi_0(z)+\varepsilon\phi_1(z)+\varepsilon^2\phi_2(z)+\cdots\cdots, \tag{7}$$

$$\delta=n^2+\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots\cdots, \tag{8}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$ 。将式(7)和(8)代入方程(6)，比较 ε 的同次幂系数，可得逐次近似方程：

$$\ddot{\phi}_0+n^2\phi_0=0, \tag{9}$$

$$\ddot{\phi}_1+n^2\phi_1=-\delta\phi_0-2\phi_0\cos 2z, \tag{10}$$

$$\ddot{\phi}_2+n^2\phi_2=-\delta_1\phi_1-\delta_2\phi_0-2\phi_1\cos 2z, \tag{11}$$

$$\ddot{\phi}_3+n^2\phi_3=-\delta_1\phi_2-\delta_2\phi_1-\delta_3\phi_0-2\phi_2\cos 2z, \tag{12}$$

$$\vdots$$

人们只关心 $n=1$ 的一阶不稳定区和它的禁带宽度。令 $n=1$，由零阶近似方程求出零级近似解，代入一级近似方程，令久期项的系数为零，可求出一级近似方程的解和 $\delta_1=\pm 1$；将一级近似解代入二级近似方程，令久期项的系数为零，可求出二级近似解和 $\delta_2=1/8$；如此下去可求出三级近似下的 $\delta_3=\pm 1/512$ 。注意到两条边界曲线之间的距离即为禁带宽度，于是一阶不稳定区的禁带宽度可表示为

$$\Delta\delta=2\varepsilon-\frac{1}{256}\varepsilon^2。 \tag{13}$$

下面对一阶不稳定区做进一步讨论，并导出系统的临界条件。

4　系统的临界性质

注意到 ε 是小量，不失一般性，略去三次和三次以上的项，一阶不稳定区的禁带宽度(13)可用系统的原始参数表示为

$$\Delta\nu_s = \frac{b\nu_s}{2}, \tag{14}$$

在注意到粒子穿越禁带时振幅呈指数增长，设 ϕ_0 是粒子进入禁带时的“初始”振幅，穿越禁带后的振幅 ϕ 可表示为

$$\phi = \phi_0 \exp(\Delta\nu_s \theta), \tag{15}$$

其中 θ 是粒子在禁带中转过的角度(或“停留”的时间)。当 ϕ 满足条件

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi = \phi_u \text{或}$$
$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi = \pi - \phi_s \tag{16}$$

时，粒子处于临界状态，其中 ϕ_u 和 $\pi - \phi_s$ 是同步运动的两个不稳定点，ϕ_s 是系统的同步相位。上式表明，当粒子穿越禁带后，如果相位的振幅 $\phi < \phi_u$ 和 $\phi < \pi - \phi_s$，运动是稳定的。由式(16)和(14)可得高频电压调制振幅的临界值：

$$b_c = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_c = \frac{2(\ln\phi_u - \ln\phi_0)}{\theta\nu_s}, \tag{17}$$

或

$$b_c = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_c = \frac{4[\ln(\pi - \phi_s) - \ln\phi_0]}{\theta\nu_s}。 \tag{18}$$

当 $b < b_c$ 时，系统是稳定的，否则系统不稳定。式(18)给出了高频电压调制振幅的临界条件，为同步运动的稳定性分析提供了物理学参考。

5　结论

由于扰动的存在，对应于 Matheiu 系统的一系列不稳定区，准等时同步加速器出现了 $\nu_s = \nu_m/2$，ν_m，$3\nu_m/2$，… 等新的共振线。这就是说，由于扰动的存在，系统的同步运动同高频电压调制相互作用，在 $\nu_s = \nu_m/2$，ν_m，$3\nu_m/2$，… 处出现了共振。本文从系统的扰动 Hamiltonian 出发，在经典力学框架内和小振幅近似下，把粒子的纵向运动方程化为 Mathieu 方程，利用摄动法导出了一阶不稳定区的边界曲线和禁带宽度。指出了由于扰动存在，当粒子穿越禁带后的相位 $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$ 等于不稳定点相位时，粒子处于临界状态，并由此导出了高频电压调制振幅的临界值

$$b_c = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_c = \frac{2(\ln\phi_u - \ln\phi_0)}{\theta\nu_s},$$

或

$$b_c = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_c = \frac{4[\ln(\pi - \phi_s) - \ln\phi_0]}{\theta\nu_s}。$$

当 $b < b_c$ 时，系统是稳定的，否则系统不稳定。

参考文献(References)：

[1] Veksler V I. Compt Rend Acad Sci USSR, 1944, **43**: 329.

[2] Veksler V I Compt Rend Acad Sci USSR, 1944, **44**: 365.

[3] McMillan E M. Phys Rev, 1945, **68**: 143.

[4] Lee S Y. Accelerator Physics(2nd Edition). Shanghai: Fudan University Press, 2006, 288－295.

[5] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley & Sons, 1981, 226－244.

[6] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Luo Xiaohua. Sci Chin, 2010, **G40** (2): 207(in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠，罗晓华. 中国科学，2010，**G40**(2)：207.)

[7] Wu Muying, Chen Qiong, Li Hongtao, *et al*. Nuclear Physics Review, 2010, **27**(1): 107(in Chinese).
(吴木营，陈琼，李洪涛，等. 原子核物理评论，2010，**27**(1)：107.)

[8] Luo Xiaohua, He Wei, Luo Shiyu, *et al*. Nuclear Physics Review, 2009, **26**(3): 242(in Chinese).
(罗晓华，何为，罗诗裕，等. 原子核物理评论，2009，**26**(4)：242.)

[9] Zhang Mei, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. Nuclear Physics Review, 2007, **24**(4): 318(in Chinese).
(张梅，邵明珠，罗诗裕. 原子核物理评论，2007，**24**(4)：318.)

Effect on Synchrotron Motion by Modulation of High Frequency Voltage*

LIU Hui-jie, LUO Shi-yu#, SHAO Ming-zhu

(*Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: In the classical mechanics frame and small amplitude approximation, the longitudinal motion equation of the particle was reduced to the Mathieu equation based on the perturbed Hamiltonian. It was pointed out that there is a series of new resonance lines in quasi-isochronous synchrotron by the perturbation. The boundary curve and the stop width for order instability zone one were derived by the method of perturbabtion. Also it was pointed that the system is at the critical point when the phase becomes equal to the phase of the instable point for the synchrotron after it crossed the stop band, and the critical condition of the high frequency voltage modulation was derived.

Key words: synchrotron; phase motion; high frequency modulation; Mathieu equation; stability

* **Received date**: 11 Aug. 2010; **Revised date**: 12 Sep. 2010

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (10947140); Natural Science Foundation of Guangdong Province (10451170003004948); Science and Technology Program of Dongguan City(2008108101002, 200910814047).

Corresponding author: Luo Shi-yu, E-mail: luoshy@126.com