第 28 卷 第 3 期
2011 年 9 月
原子核物理评论
Nuclear Physics Review
Vol. 28, No. 3
Sep., 2011

文章编号：1007-4627(2011)03-0276-14

与额外维相关的膜宇宙模型*

李希国，贾 贝[1]
(1 Virginia Pokytechnic Institute and State University, Blackskurg VA2406-0131, USA)

摘 要：对引力场的能量-动量和角动量守恒定律研究进展进行了总结。依此探讨了一般五维时空膜宇宙模型中的能量-动量张量、角动量张量以及它们的守恒定律。通过计算一个膜宇宙模型中的能动张量，论证了该模型中"可见膜"上的引力非常弱，这可认为是从引力的角度反映了规范层次问题。结果与一般的结论，即引力系统总能量为零是一致的。同时，分析了这个膜宇宙模型中的角动量张量，计算了该模型中的总角动量，讨论了暴涨 Randall-Sundren(RS)模型中的总角动量的一些性质。说明了在这类模型中总角动量的类空分量均为零，这与普通 RS 模型是一样的。同时，分析了 RS 模型中背景以及膜上的宇宙学常数，发现在 RS 模型中五维背景宇宙学常数和两个膜上的真空能都能取它们的自然值。最后通过修改 RS 模型，得到了一种可以产生很小的有效宇宙学常数的机制。

关 键 词：额外维度；膜；能动张量；角动量；宇宙学常数
中图分类号：O412.1；O412.3 **文献标识码**：A

1 引言

自从爱因斯坦提出广义相对论以来，理论物理的重要进展无不与现代数学联系在一起。广义相对论本身正是黎曼几何在物理学中的应用，而后来的规范理论与数学中的纤维丛理论之间的紧密联系又一次向物理学界宣布着数学、尤其是几何学的力量。现代的"数学物理"逐渐拓展到了代数拓扑、微分几何、泛函分析等数学分支，数学和物理学的前沿领域再一次紧紧交织在一起。

正是数学与物理学的这种紧密关系，使得爱因斯坦本人以及其他许多物理学家梦想着通过几何的方法把引力和其他几种相互作用统一起来。虽然至今为止所有的尝试都不能说是成功的，但不乏得到了一些对物理学和数学影响深远的重要结果。20 世纪 20 年代，Kaluza 和 Klein 提出了一种统一当时所知道的两种相互作用——引力和电磁相互作用的一种思路[1]。他们认为，如果我们的时空不是四维的而是五维的，那么引力和电磁力就可以通过五维度规场的分解得到。这个方法虽然随着其他两种相互作用，即弱相互作用和强相互作用的发现而失败，但却为现代物理学的一个前沿理论——"额外维理论"开创了先河，并且与超弦理论相结合，产生了许多重要的结果。20 世纪末期，人们在弦论的研究中发现自洽的超弦理论要求额外维度的存在，因此额外维理论再次被理论物理学家们所重视。然而一个重要的问题是，如果额外维度存在，为什么人们从来没有观测到这些维度呢？广泛使用的一个解决方案是认为这些额外维度被"紧致化"了，其尺度非常小(例如，普朗克尺度)，依据量子力学测不准原理我们知道，要探测如此小的尺度需要非常高的能量，远远高于人类目前能够达到的能量(约高出 16 个数量级)，因此从未观测到这些额外维度。

同时，在场论的研究中物理学家和数学家发现有许多种拓扑缺陷的存在，而且可以把场束缚在这些拓扑缺陷上。这些结果导致了一种新的额外维理论的产生——膜世界理论。所谓"膜"，可以认为是一种时空流形的拓扑缺陷(例如，孤立子)，场可以通过某种机制束缚在它的表面上。传统的额外维理论认为所有的场(包括引力)都可以在所有维度上传播，这一观点导致了传统额外维理论的许多缺陷。

* 收稿日期：2010-12-22
* 基金项目：国家自然科学基金资助项目(11035006)
作者简介：李希国(1961—)，男(汉族)，甘肃庆阳人，教授，博士，从事理论核物理研究；E-mail: xiguolee@yahoo.com

而膜理论认为标准模型中的场都被束缚在一个四维的膜上，而只有代表时空几何结构的引力可以在所有维度上传播。这样一来，额外维的尺度可以变得远大于普朗克尺度(如 ADD 模型[2])，甚至可以为无穷大。Randall-Sundrem 模型(RS 模型)是最为著名的一种膜世界模型[3]，Randall 和 Sundrem 通过提出一种具有“扭曲(warped)”度规结构的膜理论，解释了所谓的层次问题——为什么引力能标远远大于弱电能标。近几年以来，Erlich 等[4]，利用 ADS/CFT 给出了 ADS/QCD 模型，用其研究了低能强子谱，提供了一种处理低能强相互作用的非微扰方法，自此，各种各样的膜理论模型层出不穷，额外维理论再次成为理论热点。

如何得到一个合理的能量-动量张量定义，以及能动张量的守恒，都是广义相对论中未解决的核心问题。爱因斯坦本人以及 Landau 等其他人都曾试图解决这个问题[5-6]，但都没有取得令人信服的合理结果。这些定义都有一个共同的缺陷：其中引力场的能动张量是赝张量，依赖于坐标系的选择，因此不能提供一个广义协变的局域理论。这一局域性困难可能来自于等价原理，因为等价原理指出引力场不能在某一特定的时空点上被测量[7]。段一士等[8]在 20 世纪 60 年代提出了一个广义协变的能量-动量守恒定律的表达式，克服了爱因斯坦等人理论的缺陷。同时这一方法也被用于探讨角动量的守恒定律。

本文试图使用文献[8]中提出的方法来讨论膜宇宙模型中的能动张量问题。RS 模型是一个静态的模型，因此将其推广到宇宙学，讨论其动态效应。通过分析一般的五维膜宇宙模型以及“暴涨 RS 模型”中的能动张量问题，从两个膜上引力能量密度强弱差距的角度分析了规范层次问题，也对一般的五维膜宇宙模型以及“暴涨 RS 模型”中层次的存在作了引力角度的解释。另外，我们也分析了这些模型中的角动量，得到了一些合理的结论。通过推广 RS 模型，给出了一种分析另一个层次问题——宇宙学常数问题的一种机制。

2　引力规范理论

2.1　正交标架(非坐标基)

对于任意一个 n 维流形 M，其上的任意一点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 及余切空间 T_p^*M 都与 M 维数相同的线性空间相关，其自然基分别为 ∂_μ 和 $\mathrm{d}x^\mu$($\mu=0,1,2,\ldots,n-1$)。作为线性空间，点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 及余切空间 T_p^*M 均可以做标架转动，即可选择自然标架的线性组合作为新的标架：

$$T_pM \to \hat{e}_a = e_a^\mu \partial_\mu,$$

$$T_p^*M \to \hat{\theta}^a = e_\mu^a \mathrm{d}x^\mu, \text{节 } a=1,2,\ldots,n \tag{1}$$

其中 $\{e_a^\mu\} \in GL(n, \boldsymbol{R})$ 且 $\det(e_\mu^a) > 0$。这样的一组基 $\{\hat{e}_a\}$ 和 $\{\hat{\theta}^a\}$ 被称为活动标架，满足正交性 $\langle \hat{e}_a, \hat{\theta}^b \rangle = \delta_a^b$，也称为正交标架，其分量 e_a^μ 及 e_μ^a 称为 vielbein[9]。

如果 M 是黎曼流形，则其上可以定义度规张量：

$$g \equiv \eta_{ab}\hat{\theta}^a \otimes \hat{\theta}^b = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu, \tag{2}$$

其中 η_{ab} 为相应标架空间的度规。物理上使用的度规实际上是度规张量的分量

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}。 \tag{3}$$

这样定义得到的正交标架有如下性质：

(A) 正交性

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu,\ e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \tag{4}$$

(B) Lie 括号

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b]|_p = f_{ab}^c(p)\hat{e}_c|_p; \tag{5}$$

(C) 行列式

$$|e_\mu^a| = \sqrt{|g|}。 \tag{6}$$

黎曼流形 M 上的曲率张量 R 与挠率张量 T 分别定义为

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]。 \tag{7}$$

定义与正交标架 $\{\hat{e}_a\}$ 相关的联络系数 Γ_{ab}^c：

$$\nabla_a \hat{e}_b \equiv \nabla_{\hat{e}_a}\hat{e}_b = \Gamma_{ab}^c \hat{e}_c, \tag{8}$$

从而得到标架上定义的联络与 Christoffel 联络的关系：

$$\Gamma_{ab}^c = e_\nu^c e_a^\mu \nabla_\mu e_b^\nu, \tag{9}$$

通过联络系数 Γ_{ab}^c 得到曲率张量和挠率张量的分量：

$$R_{bcd}^a = \nabla_c \Gamma_{db}^a - \nabla_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{db}^e \Gamma_{ce}^a - \Gamma_{cb}^e \Gamma_{de}^a - f_{cd}^e \Gamma_{eb}^a,$$

$$T^a_{bc}=\Gamma^a_{bc}-\Gamma^a_{cb}-f^a_{bc}\,,\tag{10}$$

还可以定义一个联络 1 形式：

$$\omega^a_b\equiv\Gamma^a_{cb}\hat{\theta}^c\,,\tag{11}$$

又称为自旋联络，其分量为

$$\omega^a_{\mu b}=\Gamma^a_{cb}e^c_\mu=e^a_\nu(\nabla_\mu e^\nu_b)\,,\tag{12}$$

这样定义的联络 1 形式满足 Cartan 结构方程：

$$\begin{aligned}R^a_b&=\mathrm{d}\omega^a_b+\omega^a_c\wedge\omega^c_b\,,\\T^a&=\mathrm{d}\hat{\theta}^a+\omega^a_b\wedge\hat{\theta}^b\,,\end{aligned}\tag{13}$$

其中，$R^a_b\equiv(1/2)R^a_{bcd}\hat{\theta}^c\wedge\hat{\theta}^d$ 称为曲率 2 形式，$T^a\equiv(1/2)T^a_{bc}\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c$ 称为挠率 2 形式。对 Cartan 结构方程两边求外微分，则得到相应的 Bianchi 恒等式：

$$\begin{aligned}R^a_b\wedge\hat{\theta}^b&=\mathrm{d}T^a+\omega^a_b\wedge T^b\,,\\\mathrm{d}R^a_b+\omega^a_c\wedge R^c_b-R^a_c\wedge\omega^c_b&=0\;。\end{aligned}\tag{14}$$

2.2 协变微分

对于一个 n 维黎曼流形 M，其度规张量 $g_{\mu\nu}$ 有 $n(n+1)/2$ 个自由度，而 e^μ_a 有 n^2 个自由度，因此可以由许多不同的正交标架得到相同的度规。这些正交标架之间由标架空间的局部正交变换相联系

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^a(p)&\to\hat{\theta}^{a'}(p)=\Lambda^{a'}_a(p)\hat{\theta}^a(p)\,,\\\hat{e}_a(p)&\to\hat{e}_{a'}(p)=\hat{e}_a(p)(\Lambda^{-1})^a_{a'}\,,\end{aligned}\tag{15}$$

其相应的 veilbein 变换为

$$e^a_\mu(p)\to e^{a'}_\mu(p)=\Lambda^{a'}_a(p)e^a_\mu(p)\,,\tag{16}$$

这个局部标架变换称为局域洛仑兹变换，对应于一般底流形上的坐标变换。当 M 为普通黎曼流形时，其标架变换群为 $SO(n)$ 群：

$$\Lambda^a_b\delta_{ad}\Lambda^d_c=\delta_{bc}\,,\ \Lambda\in SO(n)\;。\tag{17}$$

当 M 为洛仑兹流形时，其标架变换群为洛仑兹群，有

$$\Lambda^a_b\eta_{ad}\Lambda^d_c=\eta_{bc}\,,\ \Lambda\in SO(n-1,1)\;。\tag{18}$$

两种情况下，变换群的维数均为 $n(n-1)/2=n^2-n(n+1)/2$，为标架 e^μ_a 与度规 $g_{\mu\nu}$ 自由度之差。对于任意一个(1，1)型张量 $X=X^a_b\hat{e}_a\otimes\hat{\theta}^b$，其变换为

$$X^{a'}_{b'}=\Lambda^b_{b'}X^a_b\,(\Lambda^{-1})^{a'}_a\,,\tag{19}$$

即上标由 Λ^{-1} 变换，而下标由 Λ 变换。对于自旋联络 ω^a_b，其变换为

$$\omega^{a'}_{b'}=\Lambda^{a'}_a\omega^a_b\Lambda^b_a\Lambda^a_{b'}-(\mathrm{d}\Lambda^{a'}_a)\Lambda^a_{b'}\;。\tag{20}$$

可见，自旋联络并不是一个局部标架变换下的张量。因此可以引入由局域洛仑兹变换得到的协变微分

$$\boldsymbol{D}_\mu X^a_b=\partial_\mu X^a_b+\omega^a_{\mu c}X^c_b-\omega^d_{\mu b}X^a_d\,,\tag{21}$$

而一般黎曼流形上可以定义由其上局部坐标变换导致的协变微分：

$$\nabla_\mu X^\nu_\rho=\partial_\mu X^\nu_\rho+\Gamma^\nu_{\mu\lambda}X^\lambda_\rho-\Gamma^\sigma_{\mu\rho}X^\nu_\sigma\;。\tag{22}$$

由这两种协变微分可定义混合协变微分：

$$\boldsymbol{D}_\mu X^{a\nu}=\partial_\mu X^{a\nu}+\omega^a_{\mu b}X^{b\nu}-\Gamma^\nu_{\mu\lambda}X^{a\lambda}\,,\tag{23}$$

一般情况下，约定 $\boldsymbol{D}_\mu e^a_\nu=\boldsymbol{D}_\mu e^\nu_a=0$，则可以得到

$$\omega^a_{\mu b}=-(\nabla_\mu e^a_\nu)e^\nu_b\,,\tag{24}$$

引入标架及自旋联络，就可以分析旋量场与引力场的耦合[10]。设 Σ^a_b 为洛仑兹群旋量表示的生成元，其代数满足

$$[\Sigma_{ab},\Sigma_{cd}]=\eta_{bc}\Sigma_{ad}+\eta_{ad}\Sigma_{bc}-\eta_{ac}\Sigma_{bd}-\eta_{bd}\Sigma_{ac}\,,\tag{25}$$

从而旋量场 ψ 关于标架的协变微分为

$$D_\mu\psi=\partial_\mu\psi+\frac{1}{2}\omega^a_{\mu b}\Sigma^b_a\psi\;。\tag{26}$$

这样就定义了旋量场与引力场之间的最小耦合。这也是在引力理论中引入标架表述的原因之一。

在广义相对论中使用黎曼流形作为时空流形。黎曼流形上的仿射联络称为 Levi-Cicita 联络，它要求：

(A) 保度规条件(Metric Compatibiliaty)

$$\nabla_X g=0\Rightarrow\nabla_\mu g_{\nu\rho}=0\,,\tag{27}$$

这实际上意味着自旋联络要满足

$$\omega_{ab}=-\omega_{ba}\,,\tag{28}$$

注意这个反对称关系只有在两个角标同为上(或下)标时才有意义。

(B) 无挠条件(Torsion-free)

$$T^a=0\Rightarrow\mathrm{d}\hat{\theta}^a+\omega^a_b\wedge\hat{\theta}^b=0\,,\tag{29}$$

写成分量形式，有

$$T^a_{\mu\nu}=\partial_\mu e^a_\nu-\partial_\nu e^a_\mu+\omega^a_{\mu b}e^b_\nu-\omega^a_{\nu b}e^b_\mu\;。\tag{30}$$

在(A)和(B)两个条件下，自旋联络 ω 可以用标架场 e 来表示：

$$\omega^{a}_{\mu b}=e^{b}_{\nu}(\partial_{\nu}e^{a}_{\mu}-\partial_{\mu}e^{a}_{\nu})+\frac{1}{2}e^{a\nu}(\partial_{\nu}e_{b\mu}-\partial_{\mu}e_{b\nu})\ ,\tag{31}$$

这类似于 Levi-Cicita 联络可以用度规来表达，而二者所需的条件也相同。

2.1　引力的规范理论

Cartan 结构方程中关于曲率张量的方程，即式(13)中的第 1 式为

$$R^{a}_{b}=\mathrm{d}\omega^{a}_{b}+\omega^{a}_{c}\wedge\omega^{c}_{b}\,,\tag{32}$$

由其分量形式，可以将时空的曲率张量用自旋联络表示出来：

$$R^{a}_{b\mu\nu}=\partial_{\mu}\omega^{a}_{\nu b}-\partial_{\nu}\omega^{a}_{\mu b}+\omega^{a}_{\mu c}\omega^{c}_{\nu b}+\omega^{a}_{\nu c}\omega^{c}_{\mu b}\,。\tag{33}$$

如果将自旋联络与曲率看作 $SO(n)$ 群(或洛仑兹群 $SO(n-1,1)$)的伴随表示空间的算子：

$$\omega_{\mu}\equiv(\omega^{a}_{\mu b}),\ R_{\mu\nu}\equiv(R^{a}_{b\mu\nu})\tag{34}$$

则有

$$R_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\omega_{\nu}-\partial_{\nu}\omega_{\mu}+[\omega_{\mu},\omega_{\nu}]\ 。\tag{35}$$

人们知道，在非 Abel 规范场理论中，主丛上的联络对应规范势，而相应的曲率对应规范场强，即

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}+[A_{\mu},A_{\nu}]\ 。\tag{36}$$

因此，可见这里时空曲率 R 相当于规范理论中的场强，而自旋联络 ω 相当于规范势。这样，就可以把 $SO(n)$ 群(或洛仑兹群 $SO(n-1,1)$)看作相应的规范群。需要注意的是，上面的对应只是符号上的对应，一旦牵扯到动力学理论，广义相对论作为一个引力理论并不能完全看作一个规范理论。例如，广义相对论中的引力拉氏量为标曲率，而一般的规范理论中拉氏量为 $-1/4F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a}$，二者在形式上并不相同，所以相应的动力学理论不同。因此并不能把引力看作一个纯粹的规范理论。

3　广义协变的守恒定律

3.1　一般系统的守恒定律

在物理理论中，一个对称性往往对应着某种守恒定律。考虑 n 维时空流形 M 中一个任意物理系统，设其系统的作用量为

$$I=\int_{M}L(\phi^{A},\partial_{\mu}\phi^{A})\mathrm{d}^{n}x\ ,\tag{37}$$

其中，ϕ^{A} 为广义场，A 为相应的广义指标，而 L 为系统的拉氏量。人们知道，一个系统如果具有某种对称性，那么这种对称性就相应于系统作用量在某种对称变换下保持不变。这里对系统作用量 I 作如下无穷小变换：

$$x^{\mu}\to x^{\mu'}=x^{\mu}+\delta x^{\mu},$$
$$\phi^{A}(x)\to\phi^{A'}(x')=\phi^{A}(x)+\delta\phi^{A}(x)\ ,\tag{38}$$

如果要求 I 在这个无穷小变换下不变，则系统就具有了与之相应的对称性。我们给定边界条件，要求 $\delta\phi^{A}(x)$ 在时空流形 M 的边界 ∂M 上为 0，则存在如下广义 Noether 定理[8, 11-14]

$$\partial_{\mu}\left(L\delta^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{A})}\delta_{0}\phi^{A}\right)+[L]_{\phi^{A}}\delta_{0}\phi^{A}=0\ ,\tag{39}$$

其中 $[L]_{\phi^{A}}$ 为拉氏量 L 对 ϕ^{A} 变分的欧拉式：

$$[L]_{\phi^{A}}=\frac{\partial L}{\partial\phi^{A}}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{A})}\right)\ ,\tag{40}$$

而 $\delta_{0}\phi^{A}$ 为场 ϕ^{A} 的 Lie 导数：

$$\delta_{0}\phi^{A}(x)=\phi^{A'}(x)-\phi^{A}(x)=\delta\phi^{A}(x)-\partial_{\mu}\phi^{A}\delta x^{\mu}。\tag{41}$$

若拉氏量 L 为系统的总拉氏量，则由最小作用量的变分原理可得到 $[L]_{\phi^{A}}=0$，这就是场 ϕ^{A} 的运动方程(Euler-Lagrange 方程)。上面的广义 Noether 定理(39)式简化为整个系统的一个守恒定律：

$$\partial_{\mu}\left(L\delta^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{A})}\delta_{0}\phi^{A}\right)=0\ 。\tag{42}$$

然而，如果拉氏量 L 不是系统的总拉氏量，那么就得不到 Euler-Lagrange 方程，即 $[L]_{\phi^{A}}\neq0$，上面的守恒定律不再成立。

在广义相对论中，引力场和物质场的守恒量可以完全由引力的拉氏量 L_{g} 来得到，而不明显依赖于物质的拉氏量 L_{m}。这是由于爱因斯坦方程把物质的引力效应归结为物质的能动张量，也就是说物质的存在导致了引力的效果。从数学的角度考虑，在一个以标架为基本场的引力理论中，可以将场 ϕ^{A} 分解为 e^{μ}_{a} 和 ψ^{B} 两部分，其中 ψ^{B} 为广义坐标变换下的任意张量，而我们总可以用 e^{μ}_{a} 使其标量化，因此总可以化为广义坐标变换下的标量[12]。由广义 Noether 定理(39)式，有

$$\partial_{\mu}\left(L\delta^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}e^{\nu}_{a})}\delta_{0}e^{\nu}_{a}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{A})}\delta_{0}\psi^{A}\right)+$$

$$[L]_{e_a^\mu}\delta_0 e_a^\mu + [L]_{\psi^A}\delta_0\psi^A = 0 \ , \qquad (43)$$

其中，无穷小变换(37)式成为

$$\begin{aligned}\delta_0 e_a^\mu &= e_a^\nu\delta(\partial_\nu x^\mu) - (\partial_\nu e_a^\mu)\delta x^\nu ,\\ \delta_0\psi^A &= -(\partial_\mu\psi^A)\delta x^\mu ,\end{aligned} \qquad (44)$$

从而可以把式(43)写为

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\left(L\delta_\sigma^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}\partial_\sigma e_a^\nu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\sigma\psi^A\right)\delta x^\sigma +\\ &\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}e_a^\sigma\delta(\partial_\sigma x^\nu)\right) + [L]_{e_a^\mu}(e_a^\nu\delta(\partial_\nu x^\mu) -\\ &(\partial_\nu e_a^\mu)\delta x^\nu) - [L]_{\psi^A}(\partial_\mu\psi^A)\delta x^\mu = 0 \ 。\end{aligned} \qquad (45)$$

根据以上关于场 $\phi^A = (e_a^\mu,\psi^B)$ 的讨论，引力部分的作用量可以写成

$$I_g = \int_M L(e_a^\mu, \partial_\nu e_a^\mu, \psi^A, \partial_\mu\psi^A)\mathrm{d}^n x \ 。 \qquad (46)$$

这个作用量应该在任意无穷小变换 $x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$ 下不变，因此可以把(45)式展开，比较 δx^μ，$\delta\partial_\nu x^\mu$ 以及 $\delta\partial_\sigma\partial_\nu x^\mu$ 的系数，可以得到一个恒等式：

$$[L]_{e_a^\nu}\partial_\mu e_a^\nu + [L]_{\psi^A}\partial_\mu\psi^A + \partial_\nu([L]_{e_a^\mu}e_a^\nu) = 0 \ , \qquad (47)$$

将其代入(45)式，经过推导得到

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\left\{\left(L\delta_\sigma^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}\partial_\sigma e_a^\nu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\sigma\psi^A + [L]_{e_a^\sigma}e_a^\mu\right)\times\right.\\ &\left.\delta x^\delta\right\} + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}e_a^\sigma\delta(\partial_\sigma x^\nu)\right) = 0 \ 。\end{aligned} \qquad (48)$$

这样就可把(45)式化成了一个完全散度的形式。如果定义

$$\begin{aligned}I_\sigma^\mu &= L\delta_\sigma^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}\partial_\sigma e_a^\nu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\sigma\psi^A + [L]_{e_a^\sigma}e_a^\mu\\ V_\nu^{\mu\sigma} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e_a^\nu)}e_a^\sigma ,\end{aligned} \qquad (49)$$

就得到相应于任意无穷小变换(38)式的守恒定律：

$$\partial_\mu[I_\sigma^\mu\delta x^\sigma + V_\nu^{\mu\sigma}\delta(\partial_\sigma x)] = 0 \ , \qquad (50)$$

这里定义的 I_σ^μ 与 $V_\nu^{\mu\sigma}$ 有如下性质：

$$\begin{aligned}I_\sigma^\mu &= -\partial_\nu V_\sigma^{\nu\mu} = \partial_\nu V_\sigma^{\mu\nu} ,\\ V_\sigma^{\nu\mu} &= -V_\sigma^{\mu\nu} 。\end{aligned} \qquad (51)$$

需要注意的是，这个守恒定律是相应于任意无穷小变换(38)式的守恒定律，因此具有一般性。另一方面，这个守恒定律中的散度为一般散度，而不是协变散度，因此一般而言(50)式并不是广义相对论中的守恒定律。

3.2 广义相对论中的守恒定律

广义相对论要求一切物理规律具有广义协变性，因此也就要求守恒定律具有广义协变性。满足这个条件的守恒定律才会与局部坐标的选择无关。首先考察当守恒量为守恒流时的情况。任意一个守恒流 j^μ，其本身是一个时空流形上的矢量，只含有一个时空流形角标。在平直时空(狭义相对论)情况下，守恒流满足的守恒定律形式为

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ , \qquad (52)$$

而在广义相对论中，一般的散度应该变为广义协变的散度：

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \ , \qquad (53)$$

二者形式上并不相同。一般而言，守恒定律只有以一般散度的形式表达出来，才可以定义相应的守恒荷，才是一个真正的守恒定律。这里 $\nabla_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu j^\nu$ 为广义协变的散度，$\Gamma_{\mu\nu}^\mu$ 为相应的联络：

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\mu &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\sqrt{|g|} \ ,\end{aligned} \qquad (54)$$

因此，守恒流满足的守恒定律形式为

$$\begin{aligned}&\nabla_\mu j^\mu = 0 \ ,\\ &\partial_\mu j^\mu + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\sqrt{|g|}\ j^\nu = 0 \ ,\\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}\ j^\mu) = 0 \ ,\end{aligned} \qquad (55)$$

由此，可以看到在守恒流满足的守恒定律中可以将一般散度和协变散度联系起来，也就可以定义相应的守恒荷：

$$Q = \int_M \mathrm{d}^{n-1}x\sqrt{|g|}\ j^0 \ 。 \qquad (56)$$

注意这里将一般散度和协变散度联系起来时，要求守恒流带有一个 $\sqrt{|g|}$，这恰恰是在弯曲空间中作积分所需要的因子。

现在考虑能动张量的守恒定律。在广义相对论中，设物质与引力场的总能动张量为 $T^{\mu\nu}$，则其守恒定律表达为

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\mu T^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}\\ &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\rho\sqrt{|g|}\,T^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}\\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}\,T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} 。\end{aligned} \qquad (57)$$

可以看到，这里能动张量的守恒定律无法用一般散度来表达，也因此不能构造相应的守恒荷，不是一个真正的守恒定律。爱因斯坦等人曾提出把广义相对论中的能动张量守恒定律改为

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu})=0\ , \tag{58}$$

就可以定义相应的守恒荷，但却失去了广义协变性。造成这个问题的原因在于，能动张量是一个二阶张量，含有两个时空流形角标[而根据前面对守恒流的守恒定律的讨论，我们知道要构造广义协变的能动守恒定律，能动张量必须为洛仑兹矢量，也就是只含有一个时空流形角标。这个结论对广义相对论中的任意守恒量的构造均成立。如何做到这一点呢？我们可以用 vielbein 把时空流形角标转化为局域标架角标。例如，对于一个任意矢量 A^{μ}，有

$$A^{a}=e^{a}_{\mu}A^{\mu}\quad\text{反之}\quad A^{\mu}=e^{\mu}_{a}A^{a}\ 。\tag{59}$$

3.3　广义相对论中的能动守恒定律

在平直时空中，能量-动量守恒定律是系统作用量在无穷小坐标平移下不变的结果：

$$\begin{aligned}&x'^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu},\ \varepsilon^{\mu}\text{ 为常矢量}\\&I'=I\ 。\end{aligned}\tag{60}$$

而在广义相对论中，时空流形为弯曲的黎曼流形，因此，任意的坐标变换具有如下形式：

$$\begin{aligned}x'^{\mu}&=x^{\mu}+\delta x^{\mu}\\&=x^{\mu}+e^{\mu}_{a}x^{a}\ 。\end{aligned}\tag{61}$$

如果取 $\delta x^{a}=\varepsilon^{a}$，其中 ε^{a} 为常矢量，也就是说与时空流形的坐标无关，仅为局域正交标架上的无穷小平移，则有广义平移[8, 11−14]：

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+e^{\mu}_{a}\varepsilon^{a}\ 。\tag{62}$$

在广义平移变换下，(50)式所描述的守恒定律可以改写为

$$\partial_{\mu}[I^{\mu}_{\sigma}e^{\sigma}_{a}+V^{\mu\sigma}_{\nu}\partial_{\sigma}e^{\nu}_{a}]=0\ ,\tag{63}$$

这是由广义平移变换导致的守恒定律，因此这就是广义相对论中的能动守恒定律。如果定义

$$\sqrt{|g|}\,\Theta^{\mu}_{a}=I^{\mu}_{\sigma}e^{\sigma}_{a}+V^{\mu\nu}_{\sigma}\partial_{\nu}e^{\sigma}_{a}\ 。\tag{64}$$

上面的守恒定律就可以写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}\,\Theta^{\mu}_{a})=0\\&\Rightarrow\nabla_{\mu}\Theta^{\mu}_{a}=0\ 。\end{aligned}\tag{65}$$

可以看到，这个守恒定律是广义协变的，也就是说 Θ^{μ}_{a} 就是我们所寻求的能量-动量张量。可以看到，Θ^{μ}_{a} 只含有一个时空流形角标，因此得到关于 Θ^{μ}_{a} 的广义协变的守恒定律(65)式。Θ^{μ}_{a} 为物质与引力的总能动张量，可以分解为

$$\Theta^{\mu}_{a}=T^{\mu}_{a}+t^{\mu}_{a},\tag{66}$$

其中，T^{μ}_{a} 为物质的能动张量，t^{μ}_{a} 为引力场的能动张量。能量-动量守恒定律可以表示为

$$\nabla_{\mu}(T^{\mu}_{a}+t^{\mu}_{a})=0\ 。\tag{67}$$

现在分析 T^{μ}_{a} 与 t^{μ}_{a} 的具体形式。可以证明[8]，在由标架表示的广义相对论中，引力与物质总拉氏量所满足的爱因斯坦方程写为

$$[L]_{e^{\mu}_{a}}=0\ ,\tag{68}$$

而总拉氏量能分解为引力部分与物质部分：

$$\begin{aligned}&L=L_{\psi}+L_{e}\\&\Rightarrow[L_{\psi}]_{e^{\mu}_{a}}+[L_{e}]_{e^{\mu}_{a}}=0\ ,\end{aligned}\tag{69}$$

可以证明[8]，物质的能动张量可以定义为

$$T^{a}_{\mu}=-\frac{1}{\sqrt{|g|}}[L_{e}]_{e^{\mu}_{a}}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}[L_{\psi}]_{e^{\mu}_{a}},\tag{70}$$

从而有

$$\begin{aligned}e^{\sigma}_{a}I^{\mu}_{\sigma}=&\left[L_{\psi}\delta^{\mu}_{\sigma}-\frac{\partial L_{\psi}}{\partial(\partial_{\mu}e^{\nu}_{a})}-\frac{\partial L_{\psi}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{A})}\right]e^{\sigma}_{a}+\\&\sqrt{|g|}\,T^{\mu}_{a},\end{aligned}\tag{71}$$

由此得到引力场能动张量的表达式为

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\,t^{\mu}_{a}=&\left[L_{\psi}\delta^{\mu}_{\sigma}-\frac{\partial L_{\psi}}{\partial(\partial_{\mu}e^{\nu}_{a})}-\frac{\partial L_{\psi}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{A})}\right]e^{\sigma}_{a}+\\&\frac{\partial L_{\psi}}{\partial(\partial_{\mu}e^{\sigma}_{b})}e^{\nu}_{b}\partial_{\nu}e^{\sigma}_{a}\ 。\end{aligned}\tag{72}$$

由(51)式，有

$$I^{\mu}_{\sigma}e^{\sigma}_{a}+V^{\mu\nu}_{\sigma}\partial_{\nu}e^{\sigma}_{a}=\partial_{\nu}(V^{\mu\nu}_{\sigma}e^{\sigma}_{a})\ ,\tag{73}$$

因此定义一个超势：

$$V^{\mu\nu}_{a}\equiv V^{\mu\nu}_{\sigma}e^{\sigma}_{a},\tag{74}$$

这样引力与物质的总能动张量就可以表达为超势的散度：

$$\sqrt{|g|}\,\Theta^{\mu}_{a}=\partial_{\nu}V^{\mu\nu}_{a},\tag{75}$$

而相应的能动张量守恒定律就表示为

$$\partial_{\mu}(\partial_{\nu}V^{\mu\nu}_{a})=0\ 。\tag{76}$$

系统的总能动矢量则为

$$P_a = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \sqrt{|g|}(T^\mu_a + t^\mu_a) = \int_S dS_{\mu\nu} V^{\mu\nu}_a , \tag{77}$$

其中，$dS_{\mu\nu} = [1/(n-2)!]\varepsilon_{\mu\nu\lambda\cdots} dx^\mu \wedge dx^\mu \wedge dx^\mu \wedge \cdots$ 为 $n-2$ 维面元，$S=\partial\Sigma$ 为 Σ 的边界，上面的面积分为在边界上的积分。在计算时，可以将 Σ 取为超曲面，则有

$$P_a = \int_V dV \sqrt{|g|}(T^0_a + t^0_a) = \int_S dS_{0\nu} V^{0\nu}_a 。 \tag{78}$$

另一方面，系统总的能动密度为

$$\varepsilon^\mu_a = \sqrt{|g|}(T^\mu_a + t^\mu_a) = \partial_\nu V^{\mu\nu}_a 。 \tag{79}$$

同上，可以将 Σ 取为超曲面，由此得到系统的总能量密度为

$$\varepsilon^0_a = \sqrt{|g|}(T^0_a + t^0_a) = \partial_\nu V^{0\nu}_a 。 \tag{80}$$

3.4　广义相对论中的角动量守恒定律

前面讨论了如何从一般的守恒定律得到能动守恒定律，下面分析如何从一般的守恒定律得到广义相对论中的角动量守恒定律，从而得到角动量的表达式[15－16]。广义相对论中，引力的拉氏量 $L = \sqrt{|g|}(2M^3 R + \Lambda)$ 可以分解为

$$\begin{aligned} &L = L_\omega + L_\Delta + L_b, \\ &L_\omega = 2M^3\sqrt{|g|}(\omega_a\omega^a - \omega_{abc}\omega^{cba}) , \\ &L_\Delta = 2M^3\partial_\mu(\sqrt{|g|}e^\nu_a\partial_\nu e^{a\mu} - \sqrt{|g|}e^{a\mu}\partial_\nu e^\nu_a) , \\ &L_b = \sqrt{|g|}\Lambda , \end{aligned} \tag{81}$$

将标架 e^a_μ 与物质场 Ψ^A 看作相互独立的变量。类似(43)式，可以得到[16]

$$\partial_\mu\left(L\delta^\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}\delta e^\nu_a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\delta\psi^A\right) + [L]_{e^\mu_a}\delta e^\mu_a + [L]_{\psi^A}\delta\psi^A = 0 。 \tag{82}$$

由爱因斯坦方程 $[L]_{e^\mu_a}=0$ 以及物质场的运动方程 $[L]_{\psi^A}=0$，上式可以化为

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L_\omega}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}\delta e^\nu_a + \frac{\partial L_\Delta}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}\delta e^\nu_a + \frac{\partial L_b}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}\delta e^\nu_a\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial L_m}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}\delta e^\nu_a + \frac{\partial L_m}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\right)\delta\psi^A = 0 , \tag{83}$$

其中 L_m 为物质场 ψ^A 的拉氏量，其他部分的拉氏量均不含物质场 ψ^A 。定义

$$\sqrt{|g|}j^\mu_{ab} = \frac{\partial L_\omega}{\partial(\partial_\mu e^{a\nu})}e^\nu_b + \frac{\partial L_m}{\partial(\partial_\mu e^{a\nu})}e^\nu_b + \frac{\partial L_b}{\partial(\partial_\mu e^{a\nu})}e^\nu_b + \frac{1}{2}\frac{\partial L_m}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(I_{ab})^A_B\psi^B 。 \tag{84}$$

则可以把(83)式改写成

$$\partial_\mu(\sqrt{|g|}j^\mu_{ab}\alpha^{ab}) + \partial_\mu\left(\frac{\partial L_\Delta}{\partial(\partial_\mu e^\nu_a)}e^{b\nu}\alpha_{ab}\right) = 0 。 \tag{85}$$

由 L_Δ 的定义(81)式，可以得到

$$\frac{\partial L_\Delta}{\partial(\partial_\lambda e^\nu_a)}e^{b\nu}\alpha_{ab} = -2M^\# \alpha^{ab}\partial_\mu(\sqrt{|g|}V^{\mu\lambda}_{ab}) , \tag{86}$$

其中

$$\begin{aligned} &V^{\mu\nu}_{ab} \equiv e^\mu_a e^\nu_b - e^\mu_b e^\nu_a , \\ &V^{\mu\nu}_{ab} = -V^{\nu\mu}_{ab} = -V^{\mu\nu}_{ba} 。 \end{aligned} \tag{87}$$

于是有

$$\partial_\mu(\sqrt{|g|}\ j^\mu_{ab})\alpha^{ab} + [\sqrt{|g|}\ j^\mu_{ab} - 2M^3\partial_\nu \times (\sqrt{|g|}V^{\nu\mu}_{ab})]\partial_\mu\alpha_{ab} = 0 。 \tag{88}$$

参数 α^{ab} 与 $\partial_\mu\alpha_{ab}$ 是相互独立的，根据上式其各自系数应分别为零，则有

$$\begin{aligned} &\partial_\mu(\sqrt{|g|}j^\mu_{ab}) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu j^\mu_{ab} = 0 , \\ &j^\mu_{ab} = 2M^3\ \nabla_\nu V^{\nu\mu}_{ab} 。 \end{aligned} \tag{89}$$

可以看到，j^μ_{ab} 满足广义协变的守恒定律，且只含一个时空流形角标，因此其广义协变的守恒定律可以与一般散度联系起来，从而定义相应的守恒核。实际上，j^μ_{ab} 正是系统的总角动量密度。而 $V^{\nu\mu}_{ab}$ 是理论相应的超势。

系统的总角动量可以用类似前面求总能动矢量的方法得到，其结果为[16]

$$J_{ab} = \int_{\Sigma_t} d\Sigma_\mu \sqrt{|g|}\ j^\mu_{ab} = 2M^3\int_{\partial\Sigma_t} d\sigma_{\mu\nu}\sqrt{|g|}V^{\mu\nu}_{ab} 。 \tag{90}$$

类似的，可以将 Σ 取为超曲面，则有

$$J_{ab} = \int_{\Sigma_t} dV\sqrt{|g|}\ j^0_{ab} 。 \tag{91}$$

4　五维时空中的四维宇宙

4.1　膜宇宙模型

在引言中，介绍了从额外维理论及超弦理论中衍生出来的膜理论。最常见的膜时空是五维的，只

含有一个额外维度(如 RS 模型)。这样的模型相对比较简单，其几何结构比较清晰，便于分析物理问题。最初的 RS 模型是静态的，后来被推广到了宇宙学情形。在宇宙学中，需要物理宇宙在大尺度上是平坦的，并且三维空间是各向同性的，根据这两个"宇宙学基本原理"，可以写出五维膜宇宙的最一般的度规[17]：

$$ds^2 = -n^2(t,z)dt^2 + a^2(t,z)\delta_{ij}dx^i dx^j + b^2(t,z)dz \ , \tag{92}$$

其中，第五维度用 z 来标记，其他四个普通维度用 x^μ 来标记。同时，用大写拉丁字母表示时空角标，用小写拉丁字母表示局部的标架角标。要求物理宇宙三维空间是各向同性的，因此"尺度因子" $n^2(t,z)$、$a^2(t,z)$ 和 $b^2(t,z)$ 都不含三维空间坐标 x^i 。

人们知道，额外维应该是紧致化的，这里采用广泛接受的 RS 模型中的紧致化方法，即额外维为一个 orbifold S^1/Z_2。存在两个膜(3-brane)，分别位于 $z=0$ 以及 $z=\pi$。局部洛仑兹度规取为(－＋＋＋＋)。系统的作用量为[17-18]

$$S = \int d^4x dz\sqrt{-g}\left[2M^3R - \Lambda\right] + \sum_{i=1,2}\int d^4x\sqrt{-g^{(i)}}\left[L - \Lambda_i\right] \ , \tag{93}$$

相应的爱因斯坦张量为[16-17]

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3\left\{\frac{\dot a}{a}\left(\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot b}{b}\right) - \frac{n^2}{b^2}\left[\frac{a''}{a}+\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right]\right\}, \\
G_{ii} &= \frac{a^2}{b^2}\left[\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}+2\frac{n'}{n}\right) - \frac{b'}{b}\left(\frac{n'}{n}+2\frac{a'}{a}\right)+2\frac{a''}{a}+\frac{n''}{n}\right] + \\
&\quad \frac{a^2}{n^2}\left[\frac{\dot a}{a}\left(-\frac{\dot a}{a}+2\frac{\dot n}{n}\right)-2\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot b}{b}\left(-2\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot n}{n}\right)-\frac{\ddot b}{b}\right] \ , \\
G_{04} &= 3\left(\frac{n'}{n}\frac{\dot a}{a}+\frac{a'}{a}\frac{\dot b}{b}-\frac{\dot a'}{a}\right), \\
G_{44} &= 3\left\{\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}+\frac{n'}{n}\right)-\frac{b^2}{n^2}\left[\frac{\dot a}{a}\left(\frac{\dot a}{a}-\frac{\dot n}{n}\right)+\frac{\ddot a}{a}\right]\right\} 。
\end{aligned} \tag{94}$$

系统的总能动张量可以分解为两部分：

$$\widetilde{T}_N^M = \hat{T}_N^M\big|_{\text{bulk}} + T_N^M\big|_{\text{brane}}, \tag{95}$$

其中，$\hat{T}_N^M\big|_{\text{bulk}}$ 为 bulk 中的能动张量，T_N^M 而为膜上的能动张量，在宇宙学中常常取为理想流体的形式

$$T_N^M\big|_{\text{brane}} = \frac{\delta(y)}{b}\text{diag}(-\rho, p, p, p, 0) \ , \tag{96}$$

其中 ρ 与 p 不依赖于 z，从而保证膜上宇宙的均匀性。通过求解爱因斯坦方程，可以得到类似普通的 Friedmann 方程[17]：

$$\frac{\dot a_0^2}{a_0^2} + \frac{\ddot a_0}{a_0} = \frac{1}{144M^3}\rho(\rho+3p) + \frac{1}{12M^3b_0^2}\hat{T}_{44} \ , \tag{97}$$

其中 a_0 以及 b_0 为各自在 $t=0$ 时刻的值。由物质的状态方程

$$\omega = \frac{\rho}{p} \tag{98}$$

以及能量守恒方程

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a_0}{a_0}(\rho+p) = 0 \ , \tag{99}$$

可以得到

$$a_0 \sim t^{1/3(1+\omega)} \ , \tag{100}$$

与四维宇宙学中的结果不同。在静态情况下，即各个尺度因子均不含时间项，若作如下选择

$$n^2 = a^2 = e^{-2k|z|}, \quad b^2 = 1 \tag{101}$$

可以得到所谓的 RS 模型，作为这个一般模型的静态解的一种。

如果假设 n 不含时间，$b=b_0$ 为常数，而 a 作为三维空间的尺度因子，必须依赖于时间，才能导致观测到加速膨胀的宇宙。进一步假设 a 可以分离变量，即取[18]

$$a = g(t)f(z), \ n = f(z), \ b = b_0 \ , \tag{102}$$

则度规为

$$ds^2 = -f^2(z)dt^2 + f^2(z)g^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j + b_0^2 dz \ 。 \tag{103}$$

这里考虑宇宙常数主导时期的宇宙，略去膜上的物质能量，从而可以得到爱因斯坦方程：

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{f^2}\left(\frac{\dot g}{g}\right)^2 - \frac{3}{b_0^2}\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2+\frac{f''}{f}\right] \\
&= \frac{1}{4M^3}\left[\Lambda + \frac{1}{b_0}\Lambda_1\delta(z) + \frac{1}{b_0}\Lambda_2\delta(z-\pi)\right], \\
G_{ii} &= \frac{1}{f^2}\left[\left(\frac{\dot g}{g}\right)^2 + 2\frac{\ddot g}{g}\right] - \frac{3}{b_0^2}\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2+\frac{f''}{f}\right] \\
&= \frac{1}{4M^3}\left[\Lambda + \frac{1}{b_0}\Lambda_1\delta(z) + \frac{1}{b_0}\Lambda_2\delta(z-\pi)\right] \ , \\
G_{44} &= \frac{3}{f^2}\left[\left(\frac{\dot g}{g}\right)^2 + \frac{\ddot g}{g}\right] - \frac{6}{b_0^2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{\Lambda}{4M^3} \ ,
\end{aligned} \tag{104}$$

其中 $G_{04}=0$ 自动满足，这一结果意味着没有沿 z 方向的物质流存在。这个模型是一般 RS 模型的动态推广，称为暴涨 RS 模型，考虑的是一个动态的宇宙常数主导时期的宇宙[原本的 RS 模型是其静态极限。对于这一组方程而言，膜相当于 bulk 的边界，而 bulk 与膜的总物质源就相当于 bulk 中的物质加上其边界条件。为了得到非奇异的时空几何结构，必须要求 n、a 和 b 在额外维 z 上连续。而上面的方程组中前两式意味着 n' 和 a' 在 $z=0$，$\pm\pi$ 处不连续，因此 n'' 和 a'' 在 $z=0$，$\pm\pi$ 处具有 δ 函数形式的奇异性。对这两个方程进行积分，形式为 $\int_{0^-}^{0^+}\mathrm{d}z$ 以及 $\int_{\pi r^-}^{\pi r^+=-\pi r^+}\mathrm{d}z$，可以得到相应的边界条件[18]：

$$\frac{n'}{n}\bigg|_{0^-}^{0^+}=-\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_1,\ \frac{a'}{a}\bigg|_{0^-}^{0^+}=-\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_1\Rightarrow$$

$$\frac{f'}{f}\bigg|_{0^-}^{0^+}=-\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_1, \tag{105}$$

$$\frac{n'}{n}\bigg|_{\pi^-}^{\pi^+}=\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_2,\ \frac{a'}{a}\bigg|_{\pi^-}^{\pi^+}=\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_2\Rightarrow$$

$$\frac{f'}{f}\bigg|_{\pi^-}^{\pi^+}=\frac{b_0}{12M^3}\Lambda_2\,。 \tag{106}$$

求解爱因斯坦方程，得到

$$g(t)=A_0\mathrm{e}^{H_0t},\quad H_0=\frac{\dot g}{g}$$

$$f(z)=\frac{H_0}{k}\sinh(-kb_0\,|z|+c)\,,$$

$$k=\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}\,, \tag{107}$$

其中 c 为积分常数。由边界条件得到

$$k_1=k\coth(c)\,,\quad -k_2=k\coth(-kb_0\pi+c) \tag{108}$$

其中 $k_i=\Lambda_i/24M^3$。这样，系统的度规就成为

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{H_0A_0}{k}\right)^2\sinh^2(-kb_0\,|z|+c)\times$$
$$[\mathrm{d}t^2+\mathrm{e}^{2H_0t}\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j]+b_0^2\mathrm{d}^2z\,。 \tag{109}$$

明显的，这属于所谓的“warped geometry”。

4.2　能动张量

现在用第三节中讨论的方法来计算这个膜世界的能动张量。模型中引力部分的拉氏量为

$$L=\sqrt{-g}\,[2M^3R-\Lambda]-\sqrt{-g^{(1)}}\Lambda_1\delta(z-\pi)-$$
$$\sqrt{-g^{(2)}}\Lambda_2\delta(z)\,, \tag{110}$$

通过使用正交标架，可以把这个拉氏量改写为[19]

$$L=\sqrt{-g}\Big[2M^3(\omega_a\omega^a-\omega_{abc}\omega^{abc})+\frac{2}{\sqrt{-g}}\partial_M(e_a^M\omega^a)-$$
$$\Lambda\Big]-\sqrt{-g^{(1)}}\Lambda_1\delta(z-\pi)-\sqrt{-g^{(2)}}\Lambda_2\delta(z)\,, \tag{111}$$

其中 $\omega_{abc}=e_a^M\eta_{db}\omega_{Mc}^d$，为 Ricci 旋转系数，具有性质 $\omega_{abc}=-\omega_{acb}$；而 $\omega_a=\eta^{bc}\omega_{bac}$。可以证明[8]，上式中的散度项在能动张量的计算过程中不起作用，因此可以略去，这样实际计算中使用的拉氏量为[19]

$$L=2M^3\sqrt{-g}(\omega_a\omega^a-\omega_{abc}\omega^{abc})-$$
$$\sqrt{-g^{(1)}}\Lambda_1\delta(z-\pi)-\sqrt{-g^{(2)}}\Lambda_2\delta(z)\,。 \tag{112}$$

由超势的定义(74)式，有

$$V_a^{MN}=4M^3\sqrt{-g}\,[e_b^Me_c^N\omega_a^{bc}+(e_a^Me_b^N-e_a^Ne_b^M)\omega^b]\,。 \tag{113}$$

将度规(92)式用正交标架来改写

$$\mathrm{d}s^2=-\hat\theta^0\otimes\hat\theta^0+\hat\theta^1\otimes\hat\theta^1+\hat\theta^2\otimes\hat\theta^2+$$
$$\hat\theta^3\otimes\hat\theta^3+\hat\theta^4\otimes\hat\theta^4\,, \tag{114}$$

就可以得到相应的正交标架基矢

$$\hat\theta^a=(n(t,z)\mathrm{d}t,\ a(t,z)\mathrm{d}x^1,\ a(t,z)\mathrm{d}x^2,$$
$$a(t,z)\mathrm{d}x^3,\ b(t,z)\mathrm{d}z)\,, \tag{115}$$

以及其分量

$$e_t^0=n(t,z),\ e_{x^i}^i=a(t,z),\ e_z^4=b(t,z)\,。 \tag{116}$$

然而，由(31)式得到自旋联络的非零分量，有

$$\omega_0^{04}=-\omega_0^{40}=\frac{1}{b}\frac{n'}{n}\,,\ \omega_4^{04}=-\omega_4^{40}=\frac{1}{n}\frac{\dot b}{b}\,,$$

$$\omega_i^{i0}=-\omega_i^{0i}=-\frac{1}{n}\frac{\dot a}{a}\,,\ \omega_i^{i4}=-\omega_i^{4i}=-\frac{1}{b}\frac{a'}{a}\,,$$

$$\omega_0=-\frac{1}{n}\left(\frac{\dot b}{b}-3\frac{\dot a}{a}\right)\,,\ \omega_4=-\frac{1}{b}\left(\frac{n'}{n}+3\frac{a'}{a}\right)\,, \tag{117}$$

从而得到超势的非零分量

$$V_0^{tz}=-V_0^{zt}=-\frac{12M^3a^2a'}{b}\,,$$

$$V_i^{x^it}=-V_i^{tx^i}=\frac{4M^3a^2b}{n}\left(\frac{\dot b}{b}-4\frac{\dot a}{a}\right)\,,$$

$$V_i^{x^iz}=-V_i^{zx^i}=\frac{4M^3a^2n}{b}\left(-\frac{n'}{n}-2\frac{a'}{a}\right)。 \tag{118}$$

由(79)式，得到系统的能量密度为

$$\varepsilon_0 = -12M^3\left(\frac{aa'^2}{b} - \frac{a^2a'b'}{b^2} + \frac{a^2a''}{b}\right) \text{，} \tag{119}$$

而系统的能动张量密度的其它分量均为零。很明显，系统的能量密度与 $n(t, z)$ 无关。因此，系统总能动矢量的唯一非零分量为系统的总能量：

$$P_0 = -12M^3\,\Phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\,\frac{aa'}{b} \text{，} \tag{120}$$

其中 Φ 代表三维空间的体积。

对于 RS 模型，实际上就是取

$$a = n = \mathrm{e}^{-kr|z|}, \quad b = r \tag{121}$$

其结果为[20]

$$\varepsilon_0 = -36M^3k^2\mathrm{e}^{-3kr|z|} \text{，} \tag{122}$$

$$P_0 = 12M^3k\mathrm{e}^{-3kr\pi}\Phi \text{，} \tag{123}$$

可以看到，这里的总能量是无穷大的，这是由于弯曲的额外维上的引力引起的效果。注意，如果 $r\to 0$，即额外维消失，那么总能量 $P_0\to 0$。这与广义相对论的一般结果相符合。在广义相对论中，一个封闭的引力系统的总能量(引力与物质的总能量)为零[21]。另外，这里得到的能量密度是负的。出现这个负值的原因在于，这里的模型是膜宇宙模型，物质能量都被束缚在膜上，而只有引力能传播到第五维度。前面提到，一个封闭系统的总能量(引力与物质的总能量)为零，如果设物质能量为正，那么引力的能量就是负的。因此在这个膜宇宙模型里，在第五维度上没有物质能量去抵消引力能量，因此这里的能量密度实际上主要反映了引力的能量密度。因此，比较 Planck 膜和 TeV 膜上的能量密度

$$\frac{\varepsilon_0^P}{\varepsilon_0^T} = \mathrm{e}^{3k\pi r}, \tag{124}$$

得到一个指数形式的差距，这实际上就是层次问题从引力角度的反映——Planck 膜上的引力远远强于 TeV 膜上的引力，即引力被局域在了 Planck 膜附近。根据 RS 模型，如果要产生足够的层次，则要求 $\mathrm{e}^{kr\pi}\sim 10^{15}$，就是要求

$$\frac{\varepsilon_0^P}{\varepsilon_0^T} \sim 10^{45} \text{。} \tag{125}$$

现在来考察暴涨 RS 模型的情况，其结果为[19](在某一给定时刻 t)

$$\varepsilon_0 = -\frac{12M^3b_0H_0^3A_0^3}{k}\mathrm{e}^{-3H_0t}\cosh(-2kb_0|z|+2c)\times \sinh(-kb_0|z|+c) \text{，} \tag{126}$$

$$P_0 = \frac{2M^3H_0^3A_0^3}{k^2}\mathrm{e}^{-3H_0t}\Phi\times[3\cosh(c)-\cosh(3c)- 3\cosh(c-kb_0\pi)+\cosh(3c-3kb_0\pi)] \text{。} \tag{127}$$

再次看到，如果 $b_0\to 0$，即额外维消失，那么仍然有总能量 $P_0\to 0$。这说明我们的结果是合理的。这时 Planck 膜和 TeV 膜上的能量密度之比为

$$\frac{\varepsilon_0^P}{\varepsilon_0^T} = \frac{\cosh(2c)\sinh(c)}{\cosh(-2kb_0\pi+2c)\sinh(-kb_0\pi+c)} \text{。} \tag{128}$$

根据前面的讨论，这里的能量密度也应该是负的。这就给积分常数 c 和额外维尺度 b_0 加上了一个限制条件：$c > kb_0\pi$。这样，又可以看到 Planck 膜上的引力远远强于 TeV 膜上的引力。如果 $c\sim(kb_0\pi)^+$，得到一个非常大的层次。也就是说，在暴涨 RS 模型中，如果取 $\varepsilon_0^P/\varepsilon_0^T\sim 10^{45}$，也可以从引力角度得到对层次问题的解释。注意，这里产生层次的唯一要求是关于额外维尺度 b_0 的要求 $c > kb_0\pi$，而根据讨论，这一点是很自然的。所能够得到的层次的大小取决于积分常数 c 和额外维尺度 b_0 的相对大小，而与额外维尺度的绝对大小无关。因此，规范层次是暴涨 RS 模型的一个性质，与额外维尺度的产生机制无关。

另外，根据边界条件(108)式，看到对于积分常数 c 的要求其实就是对于 k_1 和 k_2 的要求，这一点与文献[18]中的结论相同。我们可以看到，在 AdS 空间中要求 $k_2 < 0$，也就是要求 $c > kb_0\pi$，这与上面关于负能量密度的要求相同，也就说明了此处讨论的合理性。正如文献[18]中所说，在这个模型中，宇宙学常数问题与规范层次问题都转化成了 bulk 中宇宙学常数与膜上的宇宙学常数之间的精细调节问题。然而需要指出的是，宇宙学常数问题的解决依赖于额外维尺度的大小，而规范层次问题与额外维尺度的绝对大小无关。

4.3　角动量

在考察了这个膜宇宙的能动张量之后，再来考察它的角动量。根据(87)式，可以得到与角动量相应的超势的非零分量[22]：

$$V_{04}^{tz} = V_{40}^{zt} = -V_{04}^{zt} = -V_{40}^{tz} = \frac{1}{na} \text{，}$$

$$V_{0i}^{tx^i} = V_{i0}^{x^it} = -V_{i0}^{tx^i} = V_{0i}^{x^it} = \frac{1}{nb} \text{，} \tag{129}$$

从而得到角动量密度的非零分量：

$$j^{t}_{04} = -j^{t}_{40} = -6M^3 a^2 a' ,$$
$$j^{x^i}_{0i} = -j^{x^i}_{i0} = -2M^3 \partial_t (a^2 b) ,$$
$$j^{z}_{04} = -j^{z}_{40} = -6M^3 a^2 \dot{a} , \tag{130}$$

以及总角动量

$$J_{04} = -J_{40} = 6M^3 \Phi \int nba^5 a' \mathrm{d}y 。\tag{131}$$

可以看到，总角动量的所有类空分量均为零，这是对文献[16]中结论的推广。如果选

$$a = n = \mathrm{e}^{-kr|z|} , \quad b = r , \tag{132}$$

即考虑 RS 模型的情况，则得到类似文献[16]中的渐进结果。

下面考虑暴涨 RS 模型。同样得到总角动量的非零分量：

$$J_{04} = -J_{40} = 3M^3 \Phi A_0^6 \left(\frac{H_0}{k}\right)^7 \times$$
$$\sinh(-kb_0\pi)\sinh(-kb_0\pi + 2c) 。\tag{133}$$

可以看到，这里除了具有一般模型中的总角动量的所有类空分量均为零以外，所有的非类空分量都是无穷大。产生这个结果的原因与上节中总能量发散的原因相同——弯曲的额外维度上引力的效果。因此，这是暴涨 RS 模型与 RS 模型所共有的性质。

现在分析这一结果的渐进性质。类似上一节，如果 $b_0 \to 0$，即额外维消失，那么总角动量也将为零。这是因为此时弯曲额外维上的引力效果就消失了。这个结果也说明了我们的分析是合理的。

4.4 宇宙学常数

宇宙学常数问题[23]是当前理论物理中的一个基本问题，它也许与暗能量相关。为什么目前观测到的宇宙学常数如此之小[24]？为什么不是取它的自然值 M_{Pl}^4？二者之间存在著名的 120 个数量级的差距，也是理论物理中一个重要的层次问题。为了解决这个问题，人们进行了许多尝试，比如通过超引力[25]或者超弦理论[26]来解决。自从膜理论兴起以后，也产生了许多这方面的研究工作[27]。

RS 模型的目的是解决层次问题，即为什么引力能标远远高于弱电能标。他们的出发点是作用量(93)式以及度规：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + r_c^2 \mathrm{d}\phi^2 , \tag{134}$$

其中 $\mathrm{e}^{-2kr_c|\phi|}$ 称为扭曲因子。在 RS 模型中，四维的 Planck 能标与五维的基本质量能标相联系：

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k}[1 - \mathrm{e}^{-2kr_c\pi}], \quad k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} 。\tag{135}$$

为了产生合适的层次，RS 模型要求 $\mathrm{e}^{kr_c\pi}$ 在10^{15}的量级上。因此

$$M_{Pl}^2 \sim \frac{M^3}{k} = M^3 \sqrt{\frac{24M^3}{-\Lambda}} , \tag{136}$$

并且要求四维的 Planck 能标与五维的基本质量能标相等，因此可以看到五维的 bulk 宇宙学常数取其自然值：

$$-\Lambda \sim M_{\mathrm{Pl}}^5 。\tag{137}$$

另外，RS 模型中两个膜上的宇宙常数(真空能)由五维的 bulk 宇宙学常数和五维的基本质量能标决定：

$$-\Lambda_2 = \Lambda_1 = 24kM^3 , \tag{138}$$

因此，如果要求四维的 Planck 能标与五维的基本质量能标相等，可以看到膜上的宇宙学常数也取它们的自然值

$$-\Lambda_2 = \Lambda_1 \sim M_{\mathrm{Pl}}^4 。\tag{139}$$

另外，在 RS 模型中要求唯一的精细调节 $kr_c \sim 10$，则可以知道第五维度的紧致化尺度为

$$r_c \sim 10^{18}\ \mathrm{GeV}^{-1} \sim 10^{-34}\ \mathrm{m} 。\tag{140}$$

可以看到，额外维的尺度在 Planck 尺度附近。这就给 RS 模型的可靠性提出了一个严重的问题：RS 模型使用的是经典广义相对论，在这个尺度上广义相对论是否还有效？我们相信在这个尺度上必须考虑量子效应，这是 RS 模型的不足之处之一。

注意，在 RS 模型中，两个膜上已经预先假定存在相应的宇宙学常数。现在考虑修改一下这个假定，即考虑膜上并没有宇宙学常数，而观测到的宇宙学常数是由五维 bulk 中的宇宙学常数诱导产生的有效宇宙学常数。RS 模型提供了一个解决层次问题的机制，而这里将通过修改 RS 模型来得到一个产生小的有效宇宙学常数的机制，但仍然保留 RS 中的一个条件——要求四维的 Planck 能标与五维的基本质量能标相等。另外，还要求一个比 RS 模型还小很多的额外维紧致化半径。这些要求的原因将在后面看到。这样一来，由(135)式有

$$-\Lambda \sim M_{Pl}^5 (1 - \mathrm{e}^{-2kr_c\pi})^2 = M_{Pl}^5 \varepsilon^2 , \tag{141}$$

这里很小的额外维紧致化半径的要求转化为了很小

的 ϵ 的要求。

考虑五维的引力作用量[28]：

$$S=\int \mathrm{d}^4 x\int_{-\pi r_c}^{\pi r_c}\mathrm{d}y\sqrt{-g}\left[2M^3R-\Lambda\right]\text{。}\tag{142}$$

为了得到小的有效宇宙学常数，对膜宇宙学常数部分的作用量做沿第五维方向的积分：

$$S_\Lambda=\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-6M^3\Lambda}\,(1-\mathrm{e}^{4kr_c\pi})\text{。}\tag{143}$$

如果把四维质量尺度 M_{Pl} 作为基本的质量尺度，即要求四维的 Planck 能标与五维的基本质量能标相等，即 $M_{Pl}\sim M$，那么 bulk 中的五维宇宙学常数就取(141)中的值，因此有

$$S_\Lambda\sim\int \mathrm{d}^4 x M_{Pl}^4\epsilon(1-\mathrm{e}^{4kr_c\pi})\text{。}\tag{144}$$

把这个结果与处于 $y=r_c\pi$ 处的可见膜上的有效作用量相对比：

$$S_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g^{\mathrm{vis}}}\,(-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{vis}}+2M_{Pl}^2R_{(4)}^{\mathrm{vis}})\text{，}\tag{145}$$

其中 $g_{\mu\nu}^{\mathrm{vis}}=\mathrm{e}^{-2kr_c\pi}\eta_{\mu\nu}$。得到

$$\begin{aligned}-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{vis}}&\sim M_{Pl}^4(1-\mathrm{e}^{-2kr_c\pi})(\mathrm{e}^{4kr_c\pi}-1)\\&\sim M_{Pl}^4\delta\text{。}\end{aligned}\tag{146}$$

可以看到，如果 $\delta\sim10^{-120}$，就可以在可见膜上得到一个非常小的有效四维宇宙学常数，$-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{vis}}\sim10^{-47}\ \mathrm{GeV}^4$。注意，在 RS 模型中，为了得到 TeV 尺度与 Planck 尺度指数形式的层次，要求 $kr_c\sim10$，也就是要求 $r_c\sim10^{-34}$ cm。这里，为了产生一个非常小的四维有效宇宙学常数，要求 r_c 非常之小。这样一来，实际上小的宇宙学常数来自于小的额外维尺度。需要指出的是，这里的 r_c 太小，而无法同时解决层次问题，只能单独用类似 RS 模型中解决层次问题的机制来解决宇宙学常数问题。与 RS 模型中相同，所有的问题都只归结于第五维紧致化半径 r_c 的精细调节问题。同样的，在另一个膜——隐藏膜上也可以由类似的机制得到一个小的四维有效宇宙学常数。这个膜上的有效作用量为

$$S_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g^{\mathrm{hid}}}\,(-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{hid}}+2M_{\mathrm{Pl}}^2R_{(4)}^{\mathrm{hid}})\text{，}\tag{147}$$

其中 $g_{\mu\nu}^{\mathrm{hid}}=\eta_{\mu\nu}$。可以类似的得到

$$-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{vis}}\sim M_{Pl}^4\epsilon(1-\mathrm{e}^{-4kr_c\pi})\sim M_{\mathrm{Pl}}^4\delta'\text{。}\tag{148}$$

同样的，如果 $\delta'\sim10^{-120}$，就可以在可见膜上得到一个非常小的有效四维宇宙学常数，$-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{hid}}\sim10^{-47}$ GeV^4。

5　结论与分析

在一般的五维宇宙学膜理论以及暴涨 RS 模型中的能动张量的分析中，我们的结论显示，在暴涨 RS 模型中的总能量是无穷大的，这是由于弯曲的额外维上的引力引起的效果。注意如果 $r\to0$，即额外维消失，那么总能量 $P_0\to0$。这与广义相对论的一般其结果相符合。在广义相对论中，一个封闭的引力系统的总能量(引力与物质的总能量)为零。另外我们注意到，这里得到的能量密度是负的。出现这个负值的原因在于，这里的模型是膜宇宙模型，物质能量都被束缚在膜上，而只有引力能传播到第五维度。前面提到，一个封闭系统的总能量(引力与物质的总能量)为零，如果设物质能量为正，那么引力的能量就是负的。在这个膜宇宙模型里，第五维度上没有物质能量去抵消引力能量，因此这里的能量密度实际上主要反映了引力的能量密度。所以，比较 Planck 膜和 TeV 膜上的能量密度，便可得到一个指数形式的差距，这实际上就是层次问题从引力角度的反映——Planck 膜上的引力远远强于 TeV 膜上的引力，即引力被局域在了 Planck 膜附近。这里产生层次的唯一要求是关于额外维尺度 b_0 的要求 $c>kb_0\pi_0$，而根据讨论这一点是很自然的。层次的大小取决于积分常数 c 和额外维尺度 b_0 的相对大小，而与额外维尺度的绝对大小无关。因此，规范层次是暴涨 RS 模型的一个性质，与额外维尺度的产生机制无关。

在一般的五维膜宇宙模型以及暴涨 RS 模型的角动量分析中，可以看到总角动量的所有类空分量均为零，这是对文献[16]中结论的推广。而在暴涨 RS 模型中，除了具有一般模型中的总角动量的所有类空分量均为零这一性质以外，所有的非类空分量都是无穷大。产生这个结果的原因是由弯曲的额外维度上引力引起的效果。因此，这是暴涨 RS 模型与 RS 模型所共有的性质。如果 $b_0\to0$，即额外维消失，那么总角动量也将为零。这是因为这样一来弯曲额外维上的引力效果就消失了。这个结果也说明了我们的分析是合理的。

考虑修改 RS 模型，即考虑膜上并没有宇宙学

常数，而观测到的宇宙学常数是由五维 bulk 中的宇宙学常数诱导产生的有效宇宙学常数。RS 模型提供了一个解决层次问题的机制，而这里通过修改 RS 模型，进而得到一个能够产生小的有效宇宙学常数的机制。可以看到，如果 $\delta\sim10^{-120}$，就可以在可见膜上得到一个非常小的有效四维宇宙学常数，$-\Lambda_{(4)}^{\mathrm{vis}}\sim10^{-47}\mathrm{GeV}^4$。注意，在 RS 模型中，为了得到 TeV 尺度与 Planck 尺度指数形式的层次，要求 $kr_c\sim10$，也就是要求 $r_c\sim10^{-34}$ cm。这里，为了产生一个非常小的四维有效宇宙学常数，要求 r_c 非常之小。这样一来，实际上小的宇宙学常数来自于小的额外维尺度。需要指出的是，这里的 r_c 太小了，而无法同时解决层次问题，只能单独用类似 RS 模型中解决层次问题的机制来解决宇宙学常数的问题。与 RS 模型中相同，所有的问题都只归结于第五维紧致化半径 r_c 的精细调节。同样的，在另一个膜——隐藏膜上也可以由类似的机制得到一个小的四维有效宇宙学常数。

参考文献(References)：

[1] Kaluza T. Mathematics Physics. Berlin: Sitzungsber Press, 1921, **35**: 966; Klein O. Z Phys, 1926, **37**:895.

[2] Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G R. Phys Lett, 1998, **B429**: 263[hep-ph/9803315].

[3] Randall L, Sundrum R. Phys Rev Lett, 1999, **83**: 3370[hep-ph/9905221]; Randall L, Sundrum R. Phys Rev Lett, 1999, **83**: 4690 [hep-th/9906064].

[4] Erlich J, Katz E, Son D T, *et al*. Phys Rev Lett, 2005, **95**: 261602 [Hep-ph/0501128].

[5] Einstein A. Ann Phys Lpz, 1916, **49**: 769.

[6] Papapetrou A. Proc R Ir Acad, 1951, **A25**: 11; Bergmann P G, Thompson R. Phys Rev, 1953, **89**: 400; Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields(Second). Reading: Addison-Wesley, MA, 1962; Möller C. Ann Phys, 1958, **4**: 347; Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New York: Wiley, 1972.

[7] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. New York: Freeman, 1973.

[8] Duan Yishi, Zhang Jingye. Acta Physica Sinica, 1963, **19**: 689.
(段一士，张敬业，物理学报，1963，**19**：689-704.)

[9] Nakahara M. Geometry, Topology and Physics(Bristol: IOP Pbulishing). 1990.

[10] Hou B Y, Hou B Y. Differential Geometry for Physicists (Second). Beijing: Science Press, 2004.
(侯伯元，侯伯宇，物理学家用微分几何(第二版). 北京：科学出版社，2004.)

[11] Duan Y S, Liu J C, Dong X G. Acta Physica Sinica, 1987, **36**: 760.
(段一士，刘继承，董学耕，物理学报，1987，**36**：760.)

[12] Duan Y S, Liu J C, Dong X G. Gen Rel Grav, 1988, **20**: 485.

[13] Feng S S, Duan Y S. Gen Rel Grav, 1995, **27**: 887.

[14] Feng S S, Duan Y S. Class Quant Grav, 1999, **16**: 3237.

[15] Duan Y S, Feng S S. Commun. Theor Phys, 1996, **25**: 12.

[16] Liu Y X, Duan Y S, Zhang L J. Mod Phys Lett, 2007, **A22**: 2855(gr-qc/0508113).

[17] Binétruy P, Deffayet C, Langlois D. Nucl Phys, 2000, **B565**: 269; Binétruy P, Deffayet C, Ellwanger U, *et al*. Phys Lett 2000, **B477**: 285; Cline J M, Grojean C, Servant G. Phys Rev Lett, 1999, **83**: 4245.

[18] Kim H B, Kim H D. Phys Rev, 2000, **D61**: 064003.

[19] Jia Bei, Lee Xiguo, Zhang Pengming. J Theor Phys, 2008, **47**: 3391.

[20] Liu Y X, Duan Y S. gr-qc/0508103.

[21] Vargas T. Gen Rel Grav, 2004, **36**: 1255; Liu Y X, Zhao Z H, Yang J, *et al*. arXiv: 07063245.

[22] Jia Bei, Lee Xiguo, Zhang Pengming. Chinese Physics, 2008, **C32**: 865.

[23] Weinberg S. Rev Mod Phys, 1989, **61**: 1.

[24] Riss A G. Astron J, 1998, **116**: 1009.

[25] Fre P, Trigiante M, Van Proeyen A. Class Quant Grav, 2002, **19**: 4167; De Roo M, Westra D B, Panda S. JHEP, 2003, **0302**: 003; Aghababaie Y, Burgess C P, Parameswaran S L, *et al*. Nucl Phys, 2004, **B680**: 389.

[26] Kachru S, Kallosh R, Linde A, *et al*. Phys Rev, 2003, **D68**: 046005; Bousso R, Polchinski J. JHEP, 2000, **0006**: 046005.

[27] Rubakov V A, Shaposhnikov M E. Phys Lett, 1983, **B125**: 139; Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Kaloper N, *et al*. Phys Lett, 2000, **B480**: 193; Kachru S, Schulz M B, Silverstein E. Phys Rev, 2000, **D62**: 045021; Forste S, Lalak Z, Lavignac S, *et al*. Phys Lett, 2000, **B481**: 360; Cs'aki C, Erlich J, Grojean C, *et al*. Nucl Phys, 2000, **B584**: 359; Cs'aki C, Erlich J, Grojean C. Nucl Phys, 2001, **B604**: 312; Tye S-H H, Wasserman I. Phys Rev Lett, 2001, **86**: 1682.

[28] Jia bei, Lee Xiguo, Zhang Pengming. arXiv: 07073484, 2007.

A Brane Universe Model with Extra Dimension*

LI Xi-guo[1)], JIA Bei[1]

(1 *Virginia Pokytechnic Institute and State University*, *Blackskurg VA* 24061-0131, *USA*)

Abstract: We summarized both the general covariant energy-momentum and angular momentum conservation law in the gravitational system and analyzed the general covariant energy-momentum tensor of the gravitational system in general five-dimensional cosmological in brane-universe models. After calculating this energy-momentum for the cosmological generalization of the Randall-Sundrum(RS) model which includes the original RS model as the static limit, we are able to show that the weakness of the gravitation on the "visible" brane is a general feature of this model. This is the origin of the gauge hierarchy from a gravitational point of view. Our results are also consistent with the fact that a gravitational system has vanishing total energy. We also discussed the properties of the general covariant angular momentum in five-dimensional brane-universe model. With calculation of the total angular momentum of this model, we analyzed the properties of the total angular momentum in the inflationary RS model. We pointed that the space-like components of the total angular momentum are zero while the others are non-zero, which agrees with the results from ordinary RS model. We also investigated the bulk cosmological constant and brane vacuum energies in RS model. We show that the five-dimensional bulk cosmological constant and the vacuum energies of the two branes could take their natural values. Finally we argued how we can generate a small four-dimensional effective cosmological constant on the branes by modifying the original RS model.

Key words: extra dimension; brane; energy-momentum; angular momentum; cosmological constant

* **Received date**: 22 Dec. 2010

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (11035006)

1) E-mail: xiguolee@yahoo.com