《原子核物理评论》

www.npr.ac.cn Nuclear Physics Review

Started in 1984

压缩算符在自由标量场理论中的推广

周遥 Jarah Evslin

Generalization of Squeeze Operator in Free Scalar Field Theory

ZHOU Yao, Jarah Evslin

在线阅读 View online: https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.37.2020007

引用格式:

周遥, Jarah Evslin. 压缩算符在自由标量场理论中的推广[J]. 原子核物理评论, 2020, 37(2):172-179. doi: 10.11804/NuclPhysRev.37.2020007

ZHOU Yao, Jarah Evslin. Generalization of Squeeze Operator in Free Scalar Field Theory[J]. Nuclear Physics Review, 2020, 37(2):172-179. doi: 10.11804/NuclPhysRev.37.2020007

第 37 卷 第 2 期 原子核物理评论 Vol.37, No.2
2020 年 6 月 Nuclear Physics Review June, 2020

文章编号：1007-4627(2020)02–0172–08

压缩算符在自由标量场理论中的推广

周 遥[1,2], Jarah Evslin[1,2]

(1. 中国科学院近代物理研究所，兰州 730000；
2. 中国科学院大学核科学与技术学院，北京 100049)

摘要: 引入了一种在量子场论中构造压缩算符的办法：考虑两个具有不同质量的同一标量场的自由哈密顿量，通过博戈留波夫变换，导出广义压缩算符，该算符把一个基态映射到另一个。该算符作用的有效性分别在量子场论的狄拉克表象和薛定谔泛函表象中得到了验证。我们相信，在任意实标量场理论中，只要存在两组以线性变换联系起来的生成湮灭算符，压缩算符就被类似的方法找到。

关键词: 压缩算符；自由哈密顿量；博戈留波夫变换；狄拉克表象；薛定谔泛函表象；实标量场理论

中图分类号: O571.53 **文献标志码:** A **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.37.2020007

1 引言

压缩算符在当代量子光学中有着极其重要的地位[1–3]，它能够帮助我们研究具有压缩效应的量子态，由于光场在这种量子态中的量子涨落小于在相干态中的量子涨落，这使得它在通讯领域有着广阔的应用前景。事实上，还有一些研究者在量子色动力学中讨论压缩算符和压缩态，用来分析高能粒子在相互作用下的多重数分布[4–5]；并且在金兹堡-朗道理论的框架下，还可以用来描述夸克-胶子等离子体中的相变问题[6–7]。最后，压缩算符在宇宙学的粒子产生机制以及弦论的研究中也大放异彩[8–10]。

通过计算压缩算符与生成湮灭算符的对易关系，我们从中可以看到博戈留波夫变换。博戈留波夫变换是一种正则对易关系代数(或者正则反对易关系)之间的同构，例如，在谐振子的基矢下，考虑玻色子的生成湮灭算符 a 和 $a^\dagger$，它们满足正则对易关系 $[a,a^\dagger]=1$，对它们进行线性变换可以得到一对新的算符 b 和 $b^\dagger$：

$$\begin{aligned} b &= ua + va^\dagger, \\ b^\dagger &= u^*a^\dagger + v^*a, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 u 和 v 为复常数。如果满足条件 $|u|^2-|v|^2=1$，即可得到 $[b,b^\dagger]=1$，那么这个线性变换即为博戈留波夫变换，它保持了正则对易子的代数结构。

博戈留波夫变换作为研究各种量子系统性质的重要工具，最突出的应用是博戈留波夫自己用于超流体的研究[11]，其他应用还包括研究各种哈密顿体系以及反铁磁理论的激发[12]。但是有一个让我们印象尤其深刻的应用：在计算弯曲时空中的量子场论时，真空的定义可以改变，并且可以在这些不同的真空之间进行博戈留波夫变换，这被用于霍金辐射的推导[13]。我们从中看到了博戈留波夫变换与压缩算符之间的密切联系。

在本文中，我们首先在量子力学的框架下重现了压缩算符的作用过程：它将一个谐振子的基态映射到另一个谐振子基态。然后我们将压缩算符推广到1+1维量子场论，并实现了不同质量标量场的自由真空态之间的映射。另外，我们还注意到了一篇文献[14]，该文献用一种全新的方法得到了和我们同样的广义压缩算符，作者将其命名为量子电路扰动理论。

2 量子谐振子

在量子力学中，位置本征态

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \tag{2}$$

可以作为希尔伯特空间的一组完备基。归一化之后，任意态都能够被写成

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\ \psi(x)|x\rangle, \tag{3}$$

其中

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle。 \tag{4}$$

于是狄拉克态矢与相关联的薛定谔波函数建立了一一对应的关系。这意味着对于 $\psi(x)$ 的任何计算都可以用量子态的描述来完成。

收稿日期: 2020-01-13； **修改日期:** 2020-03-28

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11875296)；中国科学院前沿科学重点资助项目(QYZDY-SSW-SLH006)

作者简介: 周遥(1995–)，男，湖北武汉人，硕士研究生，从事粒子物理与原子核物理研究，E-mail：yaozhou@impcas.ac.cn。

在本节中，利用狄拉克和薛定谔表象，压缩算符把不同频率的量子谐振子的基态联系起来。这将为第三节量子场论中非常相似的计算做铺垫。

2.1 量子谐振子模型

量子谐振子的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\left(\hat{p}^2+\omega^2\hat{x}^2\right)。\tag{5}$$

其中：频率 ω 为正数，并且我们设约化普朗克常数 $\hbar=1$ 以及质量 $m=1$。$\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 分别为位置与动量算符且满足正则对易关系 $[\hat{x},\hat{p}]=i$。我们在薛定谔表象下进行计算，这时的态不随时间演化但是算符依赖时间。

当然，我们可以引入生成湮灭算符

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^{1/2}\hat{x}+i\omega^{-1/2}\hat{p}\right),\tag{6}$$

$$a^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^{1/2}\hat{x}-i\omega^{-1/2}\hat{p}\right)。\tag{7}$$

它们满足海森堡对易关系 $[a,a^\dagger]=1$ 并将哈密顿量对角化：

$$H=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)。\tag{8}$$

式 (8) 和海森堡代数给出了基态满足的关系：

$$a|0\rangle=0,\quad H|0\rangle=E_0|0\rangle,\quad E_0=\frac{1}{2}\omega。\tag{9}$$

在薛定谔表象，正则对易关系相当于作替换

$$\hat{p}=-\mathrm{i}\partial_{\hat{x}},\tag{10}$$

因此能量本征方程 $H|E\rangle=E|E\rangle$ 成为了一个波动方程

$$\frac{1}{2}\left(-\partial_x^2+\omega^2x^2\right)\psi=E\psi,\tag{11}$$

其解为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2^nn!}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega x^2}{2}\right)\cdot H_n(\sqrt{\omega}x),\tag{12}$$

其中出现了埃尔米特多项式

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}。\tag{13}$$

2.2 压缩算符

在量子力学，压缩算符被定义为

$$\hat{S}_r=\exp\left(\frac{1}{2}r\left(aa-a^\dagger a^\dagger\right)\right),\tag{14}$$

容易看出它是一个幺正算符。它作用于湮灭和产生算符即可导出博戈留波夫变换

$$\begin{aligned}a\hat{S}_r&=\cosh(r)\hat{S}_ra-\sinh(r)\hat{S}_ra^\dagger,\\a^\dagger\hat{S}_r&=\cosh(r)\hat{S}_ra^\dagger-\sinh(r)\hat{S}_ra。\end{aligned}\tag{15}$$

特别注意到 a 会湮灭基态，所以

$$\begin{aligned}a\hat{S}_r|0\rangle&=-\sinh(r)\hat{S}_ra^\dagger|0\rangle,\\a^\dagger\hat{S}_r|0\rangle&=\cosh(r)\hat{S}_ra^\dagger|0\rangle。\end{aligned}\tag{16}$$

2.3 两个频率

考虑一个频率为 ω_1 的量子谐振子，让它的基态 $|0\rangle_1$ 随着时间演化，然后在 t_0 时刻，某种作用导致这个谐振子的频率突变成 ω_2，那么在 t_0 之后的一段时间，基态 $|0\rangle_1$ 会逐渐演化为基态 $|0\rangle_2$。这被称为谐振子频率突变问题，其演化过程已经有一些文献讨论过[15–16]。

由于我们并不关注上述的演化过程，只关注突变前后的两个基态，事实上，我们想要研究的是两个基态之间的映射关系。虽然哈密顿量中的频率发生了变化，但是它们描述的仍然是同一个谐振子。因此，突变前后的两个哈密顿量中的正则变量是等同的，而这两个哈密顿量的生成湮灭算符是不同的，分别为 a_1、$a_1^\dagger$ 和 a_2、$a_2^\dagger$。于是，相应的正则变量会有两种不同的分解：

$$\begin{aligned}\hat{x}&=\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}\left(a_1+a_1^\dagger\right)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\left(a_2+a_2^\dagger\right),\\\hat{p}&=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_1}{2}}\left(a_1-a_1^\dagger\right)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_2}{2}}\left(a_2-a_2^\dagger\right)。\end{aligned}\tag{17}$$

不同频率对应的两组算符由博戈留波夫变换联系起来：

$$a_2=ua_1+va_1^\dagger,\quad a_2^\dagger=ua_1^\dagger+va_1,\tag{18}$$

其中 u 和 v 分别为

$$u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}+\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right),\quad v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}-\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right)。\tag{19}$$

由式 (16) 和 (18) 我们可以计算

$$\begin{aligned}a_2\hat{S}_r|0\rangle_1=&ua_1\hat{S}_r|0\rangle_1+va_1^\dagger\hat{S}_r|0\rangle_1\\=&\hat{S}_r\left(-u\sinh(r)+v\cosh(r)\right)a_1^\dagger|0\rangle_1。\end{aligned}\tag{20}$$

如果我们令 $\tanh(r)=\dfrac{v}{u}$，那么式 (20) 等于 0，也就相当于

$$|0\rangle_2=\hat{S}_r|0\rangle_1。\tag{21}$$

由此我们重现了狄拉克表象中压缩算符的作用，事实上，压缩算符

$$\hat{S}_r=\exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctanh}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\omega_1}\right)\left(a_1^2-a_1^{\dagger 2}\right)\right],\tag{22}$$

把一个谐振子的基态映射到了另一个谐振子的基态。

在薛定谔表象，第 i 个谐振子 $(i=1,2)$ 的第 n 个激发态正比于

$$(a_i^\dagger)^n\psi_0^{(i)}(x)=\left(\frac{\omega_i}{\pi}\right)^{1/4}\frac{H_n(\sqrt{\omega_i}x)}{(\sqrt{2^n})}\exp\left(-\frac{\omega_i x^2}{2}\right), \tag{23}$$

其中 $\psi_0^{(i)}(x)$ 是归一化的基态波函数。式 (21) 在薛定谔表象下的版本为

$$\begin{aligned}\hat{S}_r\psi_0^{(1)}(x)=&\exp\left(-\frac{1}{2}\hat{a}^{\dagger 2}\tanh r\right)\exp\left(\frac{1}{2}\hat{a}^2\tanh r\right)\times\\&\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\ln(\cosh r)\right)\psi_0^{(1)}\\=&\frac{\sqrt{2}(\omega_1\omega_2)^{1/4}}{\sqrt{\omega_1+\omega_2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^n\times\\&H_{2n}(\sqrt{\omega_1}x)\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega_1 x^2}{2}\right)\\=&\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega_2 x^2}{2}\right)=\psi_0^{(2)}(x),\end{aligned} \tag{24}$$

其中：第一个等号由 $SU(1,1)$ 群的 BCH 分解得到[17]；第二个等号使用了能量本征波函数；最后一个等号的计算在附录 A。

3 1+1 维克莱因-高登理论

3.1 自由实标量场模型

在量子场论中，之前量子力学中的正则变量 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 被实标量场 $\Phi(x)$ 和 $\Pi(x)$ 所取代。质量为 m 的 1+1 维自由实标量场理论由以下哈密顿量定义

$$H=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\left[\Pi^2(x)+\Phi(x)(-\partial_x^2+m^2)\Phi(x)\right]。 \tag{25}$$

场算符 $\Phi(x)$ 和它的共轭动量算符 $\Pi(x)$ 能够被生成湮灭算符展开：

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega(p)}}\left(a(p)+a^\dagger(-p)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px},\\\Pi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}(-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega(p)}{2}}\left[a(p)-a^\dagger(-p)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}px},\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\omega(p)=\sqrt{p^2+m^2}$。这些算符满足对易关系：

$$[\Phi(x),\Pi(y)]=\mathrm{i}\delta(x-y),\quad[a(p),a^\dagger(q)]=2\pi\delta(p-q), \tag{27}$$

并且 H 被 $a(p)$ 和 $a^\dagger(p)$ 表达成对角形式：

$$H=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)\left\{a^\dagger(p)a(p)+\frac{1}{2}\left[a(p),a^\dagger(p)\right]\right\}, \tag{28}$$

其中：第二项是无穷大的真空能 E_0，它能在 m 只取一个值的情况下被正规序操作所移除，但是在 m 能同时取多个值的情况下不能被移除。然而它是一个标量算符，只影响哈密顿量的本征值和本征态，因此它对各种自由哈密顿量的基态的构造是无关紧要的。由于该哈密顿量是对角的，所以其基态 $|0\rangle$ 完全由以下条件表征:

$$a(p)|0\rangle=0。 \tag{29}$$

3.2 薛定谔波函数泛函表象

在量子力学中，我们可以用态矢来表示量子态，即狄拉克右矢括号表示，也可以用薛定谔波函数来表示。同样地，在量子场论中，量子态可以用上面提到的狄拉克括号来表示，也可以用薛定谔波函数泛函来 表示[18–19]。与量子力学中的位置算符 $\hat{x}$ 和位置本征态 $|x\rangle$ 类似，量子场论中的场算符 $\Phi(x)$ 和其本征态 $|\varphi\rangle$ 由以下本征方程定义：

$$\Phi(x)|\varphi\rangle=\varphi(x)|\varphi\rangle。 \tag{30}$$

我们需要注意：对于每一个 x 的值，场算符 $\Phi(x)$ 都是一个单独的算符，所以这些量子态包含了处于同一时刻的 无穷多个对易算符的特征向量。由于这组本征态 $|\varphi\rangle$ 的完备性，任意一个厄密的 $\Psi(x)$ 都对应 一个量子态 $|\Psi\rangle$，因此可以作分解

$$|\Psi\rangle=\int D\varphi\Psi[\varphi]|\varphi\rangle, \tag{31}$$

此处的 $D\varphi$ 是所有函数 $\varphi(x)$ 所处的函数空间中的一个测度，积分是对整个函数空间而言的，这里有一个更为直观的表达：

$$D\varphi\to\prod_x\mathrm{d}\varphi(x), \tag{32}$$

而 $\Psi[\varphi]$ 是一个薛定谔波函数泛函，与量子力学中波函数的地位是一样的。式 (31) 也建立了狄拉克态矢 $|\Psi\rangle$ 与薛定谔波函数泛函 $\Psi[\varphi]$ 的一一对应关系，因此量子态能够等价地被两种形式描述。在薛定谔泛函表象中，与量子力学的情形类似，一个算符对波函数 (泛函) 的作用能够定义该算符对相应态的作用

$$\mathcal{O}\psi(x)=\langle x|\mathcal{O}|\psi\rangle\Rightarrow\mathcal{O}\Psi[\varphi]=\langle\varphi|\mathcal{O}|\Psi\rangle, \tag{33}$$

例如

$$\hat{x}\psi(x)=x\psi(x)\Rightarrow\Phi(x)\Psi[\varphi]=\varphi(x)\Psi[\varphi]。 \tag{34}$$

正如在量子力学中，正则对易关系 (27) 意味着动量可以等效地表示为一个导数

$$\Pi(x)=-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}。 \tag{35}$$

我们此处用的实际是泛函导数，因为此处的作用对象是一个泛函

$$\hat{p}\psi(x)=-\mathrm{i}\partial_x\psi(x)\Rightarrow\Pi(x)\Psi[\varphi]=-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Psi[\varphi]。\tag{36}$$

3.3 薛定谔基态波函数泛函

现在我们需要回顾一下泛函方程 $H\Psi[\varphi]=E\Psi[\varphi]$ 的解。联立方程 (25)，(34) 和 (36) 我们能得到以下泛函方程：

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\left(-\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x)}+\varphi(x)(-\partial_x^2+m^2)\varphi(x)\right)\Psi[\varphi] \\ =E\Psi[\varphi]。\tag{37}$$

假设基态解的形式为 $\Psi_0[\varphi]=\eta\exp\left(-G[\varphi]\right)$，带入方程 (37)，我们可以找到一个基态波函数泛函的解

$$\begin{aligned}\Psi_0[\tilde{\varphi}]=&\eta\ \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right),\\ E_0=&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)。\end{aligned}\tag{38}$$

其中：η 为任意标量，$\tilde{\varphi}$ 为 φ 的傅里叶变换

$$\varphi(x)=\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}。\tag{39}$$

而且和狄拉克表象一样，这里也出现了发散的真空能 E_0。由式 (26) 可以得到 $a(p)$ 和 $a^\dagger(p)$ 的展开式，因此我们也可以验证 $\Psi_0[\tilde{\varphi}]$ 确实被 $a(p)$ 湮灭

$$\begin{aligned}&a(p)\Psi_0[\tilde{\varphi}]\\ &=\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\left(\sqrt{\frac{\omega(p)}{2}}\Phi(x)+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\omega(p)}}\Pi(x)\right)\Psi_0[\tilde{\varphi}]\\ &=\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\left(\sqrt{\frac{\omega(p)}{2}}\varphi(x)-\sqrt{\frac{1}{2\omega(p)}}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right)\Psi_0[\tilde{\varphi}]\\ &=\left(\sqrt{\frac{\omega(p)}{2}}\tilde{\varphi}(p)-\sqrt{\frac{1}{2\omega(p)}}(2\pi)\frac{\delta}{\delta\tilde{\varphi}(-p)}\right)\Psi_0[\tilde{\varphi}]\\ &=0。\end{aligned}\tag{40}$$

3.4 归一化

由于我们的广义压缩算符是幺正的，所以，当它将一个基态映射到另一个，得到的基态波函数泛函的归一性也能得到保证。如果紧致化空间维度，那么就能使用标准的归一化方案。此时测度 $D\varphi$ 能写成 $\varphi(x)$ 的无穷个傅里叶分量的一般测度的乘积 (每一个分量都要除以 2π)。内积可以被定义成泛函积分的形式

$$\langle\psi|\phi\rangle=\int D\varphi\langle\psi|\varphi\rangle\langle\varphi|\phi\rangle=\int D\varphi\psi^*[\varphi]\phi[\varphi],\tag{41}$$

于是

$$\begin{aligned}1=&\int D\varphi\ \Psi^*[\varphi]\Psi[\varphi]\\ =&\eta^2\int D\tilde{\varphi}\ \exp\left(-\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right)\\ =&\eta^2\mathrm{Det}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\right),\end{aligned}\tag{42}$$

其中 ω 的矩阵元 $\omega_{pq}=\omega(p)\delta_{pq}$。因此基态波函数泛函

$$\Psi_0[\tilde{\varphi}]=\mathrm{Det}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right)\tag{43}$$

被归一化。

后面我们需要用到激发态，所以我们用以下替换①

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\longrightarrow\prod_p\left(\frac{\omega(p)}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}},\\ &\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\omega(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right)\longrightarrow\\ &\prod_p\exp-\frac{1}{2}\frac{\omega(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p),\end{aligned}\tag{44}$$

将波函数泛函重写成

$$\Psi_0[\tilde{\varphi}]=\prod_p\left(\frac{\omega(p)}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right),\tag{45}$$

正如我们预料的一样，它就是无穷个谐振子波函数的乘积。$a^\dagger(p)$ 激发了一个动量为 p 的波模，因此泛函导数变成了普通导数，而 δ 函数则从狄拉克 δ 函数变成克罗内克 δ 函数：

$$\begin{aligned}a^\dagger(p)\Psi_0[\tilde{\varphi}]=&\left(\sqrt{\frac{\omega(p)}{2}}\tilde{\varphi}(p)-\sqrt{\frac{1}{2\omega(p)}}(2\pi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(-p)}\right)\times\\ &\left(\frac{\omega(p)}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right)\times\\ &\prod_{k\neq p}\left(\frac{\omega(k)}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega(k)}{2\pi}\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(-k)\right)\\ =&\sqrt{2\omega(p)}\tilde{\varphi}(p)\prod_k\left(\frac{\omega(k)}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega(k)}{2\pi}\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(-k)\right)。\end{aligned}\tag{46}$$

在乘积表示的归一化中，生成湮灭算符的对易关系为 $[a^\dagger(p),a(p)]=2\pi$。为了与量子力学的情形相对应，且方便后面的计算，我们重新定义以下算符代替原来的生成湮灭算符

① 该替换和 (32) 式类似，但是会改变 Φ 以及 $a(p)$ 和 $a^\dagger(p)$ 的归一化。

$$a_p \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega(p)}{2\pi}} \tilde{\varphi}(p) + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega(p)}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(-p)} \right), \tag{47}$$

新算符的归一化为$[a_p, a_p^\dagger] = 1$，并且有

$$\left(a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\right)^n \Psi_0[\varphi] = \frac{H_{2n}\left(\frac{\omega(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right)}{2^n}\Psi_0[\varphi], \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned} & H_{2n}\left(A(p)\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right) \\ =& \mathrm{e}^{A(q)\tilde{\varphi}(q)\tilde{\varphi}(-q)} \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\left(A(p)\mathrm{d}\tilde{\varphi}(p)\mathrm{d}\tilde{\varphi}(-p)\right)^n} \mathrm{e}^{-A(q)\tilde{\varphi}(q)\tilde{\varphi}(-q)}, \\ & A(p) = \frac{\omega(p)}{2\pi}。 \end{aligned} \tag{49}$$

3.5 两个基态之间的映射

现在我们考虑两个不同的质量m_1和m_2。准确来说，我们考虑的是一个单独的实标量场$\Phi(x)$，以及同一个希尔伯特空间中的量子态。然而，可以构造两个不同的算符，它们作用于此希尔伯特空间，这将被解释为两种不同理论的哈密顿量：其中一个的自由标量场质量为m_1，另外一个为m_2。此时的共轭动量场算符$\Pi(x)$也不是用哈密顿量或者拉格朗日量定义的，而是仅仅由与$\Phi(x)$满足正则 对易关系的算符来定义的。这对于定义场算符和它们所作用的态已经是足够的。

对于每个质量，都能够对场作傅里叶分解

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x \Phi(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_1(p)}}\left(a_1(p) + a_1^\dagger(-p)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_2(p)}}\left(a_2(p) + a_2^\dagger(-p)\right), \\ \int \mathrm{d}x \Pi(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &= (-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega_1(p)}{2}}\left(a_1(p) - a_1^\dagger(-p)\right) \\ &= (-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega_2(p)}{2}}\left(a_2(p) - a_2^\dagger(-p)\right), \end{aligned} \tag{50}$$

其中$\omega_i(p) \equiv \sqrt{p^2 + m_i^2}$，$i = 1, 2$。这两种分解由博戈留波夫变换联系起来，与式 (18) 类似

$$a_2(p) = u(p)a_1(p) + v(p)a_1^\dagger(-p), \tag{51}$$

其中

$$\begin{aligned} u(p) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_2(p)}{\omega_1(p)}} + \sqrt{\frac{\omega_1(p)}{\omega_2(p)}}\right), \\ v(p) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_2(p)}{\omega_1(p)}} - \sqrt{\frac{\omega_1(p)}{\omega_2(p)}}\right)。 \end{aligned} \tag{52}$$

到目前为止，一切都与量子力学的情况是类似的，唯一的区别是其中出现了对p的依赖。这使得我们把压缩算符假设为

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \exp(A), \\ A &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} f(p)\left(a_1(p)a_1(-p) - a_1^\dagger(p)a_1^\dagger(-p)\right)。 \end{aligned} \tag{53}$$

其中$f(p)$是一个待解的函数。我们需要注意的是，该算符对于任意实函数$f(p)$都应该是幺正的，但是它并不是正规序的，因为这样会破坏其幺正性①。

通过计算幂指数的对易子

$$\begin{aligned} [A, a_1(p)] &= f(p)\, a_1^\dagger(-p), \\ \left[A, a_1^\dagger(-p)\right] &= f(p)\, a_1(p), \end{aligned} \tag{54}$$

我们可以得到压缩算符对生成湮灭算符的作用：

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger a_1(p)\hat{S} &= \mathrm{e}^{-A}a_1(p)\mathrm{e}^A \\ &= a_1(p) + [-A, a_1(p)] + \frac{1}{2}[-A, [-A, a_1(p)]] + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(p)^{2n}}{(2n)!}a_1(p) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(p)^{2n+1}}{(2n+1)!}a_1^\dagger(-p) \\ &= \cosh(f(p))a_1(p) - \sinh(f(p))a_1^\dagger(-p), \\ \hat{S}^\dagger a_1^\dagger(-p)\hat{S} &= \cosh(f(p))a_1^\dagger(-p) - \sinh(f(p))a_1(p)。 \end{aligned} \tag{55}$$

将第二个湮灭算符作用于第一个理论的压缩真空态，于是有

$$\begin{aligned} & a_2(p)\hat{S}|0\rangle_1 \\ =& \left[u(p)a_1(p) + v(p)a_1^\dagger(-p)\right]\hat{S}|0\rangle_1 \\ =& \hat{S}\left(u(p)\cosh(f(p)) - v(p)\sinh(f(p))\right)a_1^\dagger|0\rangle_1, \end{aligned} \tag{56}$$

如果取$f(p) = \mathrm{arctanh}\left(\frac{v(p)}{u(p)}\right)$，那么式 (56) 将等于 0，即$\hat{S}|0\rangle_1$被$a_2(p)$所湮灭，可将其定义为第二个理论的真空态。最终，我们成功找到了压缩算符：

$$\begin{aligned} \hat{S} = \exp\Bigg\{ & \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{arctanh}\left[\frac{v(p)}{u(p)}\right] \times \\ & \left[a_1(p)a_1(-p) - a_1^\dagger(p)a_1^\dagger(-p)\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{57}$$

将一个质量为m_1的自由标量场哈密顿量的基态映射到

① 构造一个非幺正的正规序算符是很容易的，你可以简单地忽略第二项，并重复下面的计算。该计算比幺正的情况简单许多，因为它与$a^\dagger$的对易子为0，导出的$f(p)$是一个常数。

了另一个质量为m_2的自由标量场哈密顿量的基态

$$\hat{S}|0\rangle_1 = |0\rangle_2。 \tag{58}$$

而且，我们也能在薛定谔表象下验证：

$$\begin{aligned}\hat{S}\Psi_0^{(1)}[\tilde{\varphi}] =& \left\{\prod_p \exp\left[-\frac{1}{2}a_p^\dagger a_{-p}^\dagger \tanh f(p)\right]\times\right.\\ &\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a_p^\dagger a_p + a_{-p}a_{-p}^\dagger\right)\ln(\cosh f(p))\right]\times\\ &\left.\exp\left[\frac{1}{2}a_p a_{-p}\tanh f(p)\right]\right\}\Psi_0^{(1)}[\tilde{\varphi}]\\ =&\left\{\prod_p \frac{\sqrt{2}\left(\omega_1(p)\omega_2(p)\right)^{1/4}}{\sqrt{\omega_1(p)+\omega_2(p)}}\times\right.\\ &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!}\left[\frac{\omega_1(p)-\omega_2(p)}{\omega_1(p)+\omega_2(p)}\right]^n\times\\ &\left.H_{2n}\left[\frac{\omega_1(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right]\right\}\Psi_0^{(1)}[\tilde{\varphi}]\\ =&\Psi_0^{(2)}[\tilde{\varphi}]。\end{aligned} \tag{59}$$

其中

$$\Psi_0^{(i)}[\tilde{\varphi}] = \prod_p\left[\frac{\omega_i(p)}{\pi}\right]^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\omega_i(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right]。 \tag{60}$$

这个计算过程和量子力学中的计算过程是类似的。最后一个等号能够通过在固定的q展开$\Psi_0^{(i)}[\tilde{\varphi}]$到$(\tilde{\varphi}(q)\tilde{\varphi}(-q))$的任意次幂来验证，详细过程见附录B。

4　结论

本文通过博戈留波夫变换导出了量子场论中的广义压缩算符，它确实能够将不同质量的自由哈密顿量的真空进行相互映射，而且这种映射关系在狄拉克表象与薛定谔表象中都得到了验证。由于本文所有的结果都是从标准的量子力学和量子场论推导出来的，所以我们相信该方法具有很好的可推广性，并且在物理上也具有很强的说服力。在量子场论中，存在无穷多对生成湮灭算符$a(p)$和$a^\dagger(p)$，但是这种变换只混合了单独的一对生成湮灭算符，所以它本质上和量子力学的情况是一样的。因此，执行变换的广义压缩算符(57)本质上是量子力学压缩算符的一个产物。在对易关系(54)中可以看到关键的简化，因为它仅交换两个元素，所以很容易将其取幂得 到式(55)。

文献[20]运用IWOP方法构造的压缩算符和我们的十分类似，并且它指出此算符重新标度了标量场。在3+1维时空，标量场是有量纲的，因此这样的一个种标度意味着一种尺度伸缩。类似地，在我们的例子中，我们重新标度了场的质量，也意味这一种尺度伸缩。

其实，我们最终想要将压缩算符推广到对生成湮灭算符作任意线性变换的情形，此时将不再只是混合单独的一对$a(p)$和$a^\dagger(p)$，而是推广到

$$\begin{aligned}&\hat{S} = \exp(A),\\ &A = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}f(p,q)\left[a(p)a(-q) - a^\dagger(p)a^\dagger(-q)\right]。\end{aligned} \tag{61}$$

此时每一个在式(55)中的对易子都会附加一个与f的卷积。因此我们最终需要求解的关于f的方程将涉及 到一个无穷级数的卷积。但是，它仅仅是一个单独的代数方程，因此我们相信可以通过数值求解来得出压缩算符。

如果我们不要求压缩算符是幺正的，那么求解会变得更加简单。在这样的情况下，我们只需要考虑式(61)中的$a^\dagger a^\dagger$ 项，那么$\hat{S}$ 将和$a^\dagger$对易，并且在和a 的对易计算中，只有一个对易子是非零的。这将使得式(55)的求幂变得十分简单，因此我们能够解析地 求出$f(p,q)$。如果有必要，也可以做归一化，即对所得的基态进行归一化。

总而言之，我们相信，对于任意的实标量场理论，只要存在两组以线性变换联系起来的生成湮灭算符，就能够用类似本文的办法来求得压缩算符。

参考文献：

[1] WALLS D. Nature, 1983, 306: 141.
[2] SCULLY O M, ZUBAIRY S M. Quantum Optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
[3] WALLS F D, MILBURN J G. Quantum Optics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
[4] DODONOV V V, DREMIN M I, MAN'KO V O, et al. arXiv: hep-ph/9502394.
[5] BAMBAH A B, SATYANARAYANA V M. Progress of Theoretical Physics Supplement, 1986, 86: 377.
[6] BABICHEU L, BUKACH A A, KUVSHINOV I V, et al. Physics of Atomic Nuclei, 2004, 67: 574.
[7] CSORGO T, PADULA S S. Brazilian Journal of Physics, 2007, 37: 949.
[8] ADJEI E, GIELEN S, WIELAND W. Classical and Quantum Gravity, 2018, 35: 105016.
[9] HU B L, KANG G, MATACZ A. International Journal of Modern Physics A, 1994, 09: 991.
[10] NIEMI J A, SEMENOFF W G. Physics Letters B, 1994, 176: 108.
[11] BOGOLIUBOV N N. J Phys (USSR), 1947, 11: 23.
[12] KITTEL Charles. Textbook: Quantum Theory of Solids[M]. New York: Wiley, 1987.
[13] HAWKING W S. Commun Math Phys, 1976, 46: 206.
[14] COTLER J, MOHAMMADI R M, MOLLABASHI A, et al.

arXiv: 1806.02831[hep-th].
[15] GRAHAM R James. Journal of Modern Optics, 1938, 34: 6, 873.
[16] ABDULLAH M S, COLEGRAVE R K. Phys Rev A, 1993, 48: 1526.
[17] CHIRIBELLA G, DARIANO M G, PERINOTTI P. arXiv: quant-ph/0610142.
[18] STUECKELBERG G C E. Helv Phys Acta, 1938, 11: 225.
[19] FRIEDRICHS O K. Comm Pure Appl Math, 1951, 4: 161.
[20] FAN Hongyi, FAN Yue. Communications in Theoretical Physics, 2000, 34: 373.

附录A 压缩波函数

在此附录中，我们将要推导出 $\hat{S}_r\psi^{(1)}(x)=\psi^{(2)}(x)$。方程 (24) 两边同时除以一个高斯函数，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^n H_{2n}(\sqrt{\omega_1}x)$$
$$=\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1}}\exp\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}x^2\right)。\tag{62}$$

埃尔米特公式展开为

$$H_{2n}(\sqrt{\omega_1}x)=(2n)!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}}{(2l)!(n-l)!}(2\sqrt{\omega_1}x)^{2l}。\tag{63}$$

因此公式 (62) 的左边可以写成：

$$LHS=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^n\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}2^{2l}\omega_1^l}{(2l)!(n-l)!}x^{2l}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}A_lx^{2l},\tag{64}$$

其中系数 A_l 为

$$A_l=\sum_{n=l}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^n\frac{(-1)^{n-l}2^{2l}\omega_1^l}{(2l)!(n-l)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2(n+l)!}{2^{2n}(n+l)!}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^{n+l}\frac{(-1)^n\omega_1^l}{(2l)!n!}。\tag{65}$$

我们把公式 (62) 的右边写成相似的形式：

$$RHS=\sum_{l=0}^{\infty}B_lx^{2l},$$
$$B_l=\frac{1}{l!}\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1}}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)^l。\tag{66}$$

在我们对比 A_l 和 B_l 是否相等时，我们需要使用下面的等式：

$$\frac{(2m)!}{m!}=2^{2m}\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)。\tag{67}$$

比较公式 (67) 在 $m=n+l$ 和 $m=l$ 的值，我们可以得到

$$\frac{(2(n+l))!}{(n+l)!}=\frac{(2l)!}{l!}2^{2n}\left(n+l-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\left(n+l-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(l+\frac{1}{2}\right)。\tag{68}$$

我们还会用到泰勒展开式：

$$(1+x)^{-k-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-k-\frac{1}{2}\right)\left(-k-\frac{3}{2}\right)\cdots\times$$
$$\left(-k-n+\frac{1}{2}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdots\times$$
$$\left(k+n-\frac{1}{2}\right)x^n。\tag{69}$$

那么我们计算 A_l 会得到：

$$A_l=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+l-\frac{1}{2}\right)\left(n+l-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(l+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^{n+l}\frac{(-1)^n\omega_1^l}{n!l!}$$
$$=\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^l\left(1+\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)\right)^{-l-\frac{1}{2}}\frac{\omega_1^l}{l!}$$
$$=\frac{1}{l!}\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1}}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)^l$$
$$=B_l,\tag{70}$$

其中第一个等号由式 (68) 得到，第二个等号由式 (69) 得到。至此，我们可以证明了式 (62) 对于 x 的任意 $2l$ 阶项都成立。

附录B 压缩波函数泛函

在此附录中，我们将要推导 $\hat{S}_r\varPsi_0^{(1)}[\tilde{\varphi}]=\varPsi_0^{(2)}[\tilde{\varphi}]$。方程 (59) 两边除以一个连乘的高斯函数，得到

$$\prod_p\alpha_p=\prod_p\beta_p,\tag{71}$$

其中

$$\alpha_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!}\left[\frac{\omega_1(p)-\omega_2(p)}{\omega_1(p)+\omega_2(p)}\right]^n H_{2n}\left[\frac{\omega(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right]$$
$$\beta_p=\left[\sqrt{\frac{\omega_1(p)+\omega_2(p)}{2\omega_1(p)}}\right]\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_2(p)-\omega_1(p)}{2\pi}\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)\right]。$$

系数 α_p 和 β_p 以 $(\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p))$ 的级数作展开

$$\alpha_p = \sum_{l=0}^{\infty} A_{p,l}(\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p))^l,$$
$$\beta_p = \sum_{l=0}^{\infty} B_{p,l}(\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p))^l, \tag{72}$$

其中

$$A_{p,l} = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left[\frac{\omega_1(p)-\omega_2(p)}{\omega_1(p)+\omega_2(p)}\right]^n \frac{(-1)^{n-l}2^{2l}\omega_1(p)^l}{(2l)!(n-l)!(2\pi)^l}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+l)!}{2^{2n}(n+l)!}\left[\frac{\omega_1(p)-\omega_2(p)}{\omega_1(p)+\omega_2(p)}\right]^{n+l} \frac{(-1)^n\omega_1(p)^l}{(2l)!n!(2\pi)^l},$$
$$B_{p,l} = \frac{1}{l!}\sqrt{\frac{\omega_1(p)+\omega_2(p)}{\omega_1(p)}}\left[\frac{\omega_1(p)-\omega_2(p)}{2}\right]^l \frac{1}{(2\pi)^l}。 \tag{73}$$

可以发现，上式就是附录 A 中的 A_l 和 B_l。由 $A_{p,l} = B_{p,l}$，可知 $\alpha_p = \beta_p$，即式 (59) 得以证明。

Generalization of Squeeze Operator in Free Scalar Field Theory

ZHOU Yao[1,2,1)], Jarah Evslin[1,2]

(1. Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China;
2. School of Nuclear Science and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Our article introduces a method to construct the squeeze operator in quantum field theory: consider two free Hamiltonians for the same scalar field with two different masses, through Bogoliubov transformation, we derive a generalized squeeze operator which maps the ground state of one to the other. The efficiency of its operation is verified in both the Dirac representation and also the Schrodinger wavefunctional representation in quantum field theory. We believe that the squeeze operators can be found similarly in any real scalar field theory as long as there are two sets of creation and annihilation operators connected by linear transformations.

Key words: squeeze operator; free Hamiltonian; Bogoliubov transformation; Dirac representation; Schrodinger wavefunctional representation; real scalar field theory

Received date: 13 Jan. 2020; **Revised date:** 28 Mar. 2020

Foundation item: National Nature Science Foundation of China (11875296); Key Research Program of Frontier Sciences of Chinese Academy of Sciences(QYZDYSSW-SLH006)

1) E-mail: yaozhou@impcas.ac.cn.